注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。**可直接下載而不須申請**。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

International Mathematics Tournament of Towns
環球城市數學競賽
2007 秋季賽　高中組　初級卷　2007/10/21

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 有 100 張照片，每張照片內的人物都恰好有一位大人、一位小孩，同一張照片中大人比小孩高，這些照片中的人物都不重複出現。我們打算剪輯這些照片，將這 200 個人重組成一張大照片。剪輯時，任意一張照片內的人物都允許被同時縮小為 $\frac{1}{n}$ 倍（其中 n 為正整數），不同的照片可用不同的比例縮小。試證一定有一種辦法可以使重組後的大照片中每位大人的高度都大於任何一位小孩的高度。（三分）

【參考解法】

假設有 n 張相片，對 n 使用數學歸納法。

當 $n=1$ 時，直接成立。

假設結論對某一個固定的 n 成立，其中 $n\geqq 1$。現考慮有 $n+1$ 張相片時的情況。由歸納法的假設可知，前 n 張照片可以在重組後的大照片中每位大人的高度都大於任何一位小孩的高度。令重組後最低的大人高度為 a、最高的小孩高度為 c，而第 $n+1$ 張中大人的高度為 b、小孩的高度為 d。若 $b>c$ 且 $a>d$，則結論成立無須再證。若 $b>d>a>c$，則 $\frac{c}{b}<\frac{a}{d}$，故存在一個有理數 r 滿足 $\frac{c}{b}<r<\frac{a}{d}$，也因此可得 $a>rd$ 以及 $rb>c$。令 h、k 為正整數使得 $r=\frac{h}{k}$，則可將第 $n+1$ 張照片縮小 $\frac{1}{h}$ 倍以及再將其它的照片縮小 $\frac{1}{k}$ 倍即可。若 $a>c>b>d$，利用相同的方式即可得證。取 n=100 即為本題所要求之狀況，故成立。

【評分標準】

(a) 會作 2 張照片時的操作，$\frac{1}{7}$ 分

　　會作 3 張照片時的操作，$\frac{2}{7}$ 分

(b) 會用歸納證明，$\frac{5}{7}$ 分

(c) 證明出任何照片可任意作出比例為 $\frac{q}{p}$，$\frac{3}{7}$ 分

(d) 假設身高都是整數，取全部孩子身高的最大公因數，設為 t，將孩子的身高縮為 t，也滿足題意，$\frac{2}{7}$ 分

2. 在黑板上寫下三個正實數：1、x 與 y。允許下列操作：

(1) 可以寫下一個等於黑板上任意二個數之和或差的數。

(2) 可以寫下一個黑板上任意一個數的倒數。

請問能不能進行有限次上述操作後可以寫下：

(a) x^2 ；（二分）

(b) xy。（二分）

【參考解法】

(a)

可先寫下 $x+1$ 與 $x-1$。接著可寫下 $\frac{1}{x+1}$、$\frac{1}{x-1}$ 以及這兩數之差 $\frac{2}{x^2-1}$。因此可得其倒數 $\frac{x^2-1}{2}$。可再作一次 $\frac{x^2-1}{2}$ 使黑板上有兩個 $\frac{x^2-1}{2}$，將這兩個 $\frac{x^2-1}{2}$ 相加即得 x^2-1，最後再加上原有的 1 便可得到 x^2。

(b)

可先寫下 $x+y$。由(a)得知可以在黑板上寫下 x^2、y^2、$(x+y)^2$，故可以得到 $2xy=(x+y)^2-x^2-y^2$，也因此可以寫下其倒數 $\frac{1}{2xy}$。可再作一次 $\frac{1}{2xy}$ 使黑板上有兩個 $\frac{1}{2xy}$，將這兩個 $\frac{1}{2xy}$ 相加即得 $\frac{1}{xy}$，再作其倒數便可得到 xy。

【評分標準】

1. 寫出 x^2、y^2、$(x+y)^2$ 其中 2 個，$\frac{2}{7}$ 分

2. 寫出 $(x+y)^2-x^2-y^2=2xy$，$\frac{2}{7}$ 分

3. 寫出 $2xy$，要註明作 2 次，$\frac{2}{7}$ 分（未註明作 2 次，扣 $\frac{1}{7}$ 分）

4. 導出 xy，$\frac{1}{7}$ 分

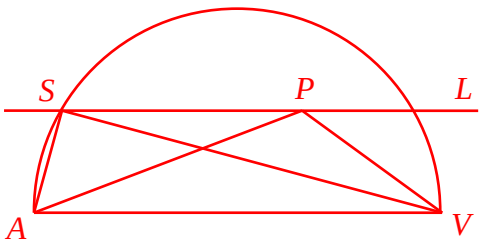
3. 線段 AV 平行於直線 L。請用沒有刻度的直尺與圓規在此直線上作出點 S，使得 $AS\times VS$ 之值最小。（四分） (註：必須寫下作圖方法及證明)

【參考解法 1】

以 AV 為直徑作半圓，此半圓必須與 L 在 AV 的同一側。

若 L 與半圓有交點，令其中一個交點為 S，如圖一所示，則 $\angle VSA=90^\circ$ 以及 $\triangle AVS$ 的面積為 $\frac{1}{2}AS\times VS$。

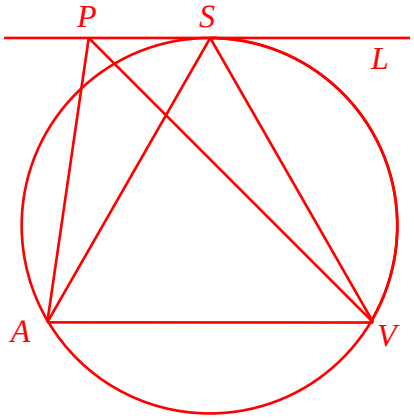
對於 L 上異於 S 點的任意一點 P 而言，可得 $\triangle AVP$ 的面積為 $\frac{1}{2}AP\times VP\times\sin\angle APV\leqq\frac{1}{2}AP\times VP$。因為 L



圖一

與 AV 平行，故△AVC 與△AVP 的面積相等，即 $AS\times VS \leqq AP\times VP$，故 S 點滿足題意。

若 L 與半圓無交點，則在 L 上取一點 S 使得 $AS=VS$。此時可畫出△AVS 的外接圓且 L 為該圓的切線，如圖二所示。因此對於 L 上異於 S 點的任意一點 P 而言，可知 $\angle ASV>\angle APV$。利用相同想法，因為 L 與 AV 平行，故△AVS 與△AVP 的面積相等，即 $AS\times VS \leqq AP\times VP$，故 S 點滿足題意。

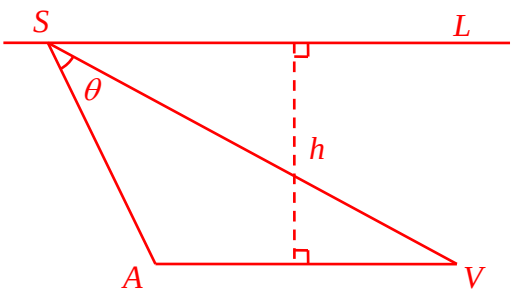


圖二

【參考解法 2】

〔**論證**〕

如圖三，設 AV 與 L 之距離為 h（定值），在 L 上任取一點 S，令 $\theta=\angle ASV$。不論 S 在 L 上如何變動，△AVS 的面積都是「定值」。由△AVS 面積 $=\frac{1}{2}AS\times VS\times\sin\theta$ 知 $AS\times VS=\frac{2\times\triangle AVS\text{面積}}{\sin\theta}$，故可知：「當 $\sin\theta$ 值愈大 $\Leftrightarrow$ $AS\times VS$ 愈小」。因此要想辦法在 L 上找出一點 S，使得 $\sin\theta$ 值最大。

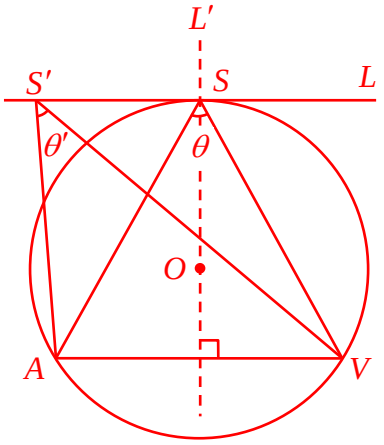


圖三

〔**作圖**〕

1. 當 $h\geq\frac{1}{2}AV$ 時，如圖四

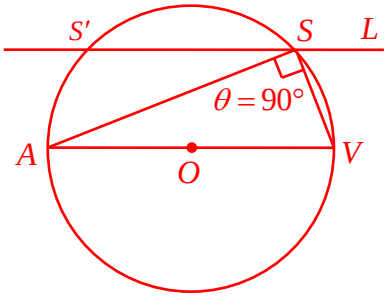
作 AV 的中垂線 L'，L 與 L' 交於點 S，再作△AVS 的外接圓 O（圓心 O 在 L' 上）因半徑 $OS\perp L$，故直線 L 是外接圓 O 的切線。若 S' 是 L 上異於 S 的點，則 S' 在圓 O 外部，故知 $\theta>\theta'$，因此所取的 S 點滿足 $\sin\theta$ 值最大，即 $AS\times VS$ 最小。



圖四

2. 當 $h<\frac{1}{2}AV$ 時，如圖五

以 AV 的中點 O 為圓心，以 $\frac{1}{2}AV$ 為半徑作圓，交 L 於兩點 S、S'，此時 $\angle AS'V=\angle ASV=90^\circ$，故所求之 S(或 S')滿足 $\sin\theta=1$ 最大，即 $AS\times VS$ 最小。



圖五

【評分標準】

(a) 作圖情況主要分兩大類

(1)當 $d(\overline{AV},L)\leq\frac{\overline{AV}}{2}$ 時，點 S 在以 $\overline{AV}$ 為直徑的圓與直線 L 的交點上，此時

$\angle ASV = 90°$，而 $d(\overline{AV}, L) = \frac{\overline{AV}}{2}$ 時，L 與 S 相切，恰一點 S，否則有兩個 S 點：(i) 作圖正確，$\frac{2}{7}$ 分

(ii) 沒有作圖程序，$\frac{1}{7}$ 分

(2)當 $d(\overline{AV}, L) > \frac{\overline{AV}}{2}$ 時，點 S' 在 $\overline{AV}$ 的中垂線與直線 L 的交點上，恰一點：

(i) 作圖正確，$\frac{2}{7}$ 分

(ii) 沒有作圖程序，$\frac{1}{7}$ 分

當(1)、(2)作圖均正確，最多給 $\frac{3}{7}$ 分

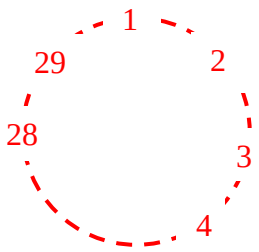
(b) 論證部分

在(a)中的(1)、(2)分別論證，最多各給 $\frac{2}{7}$ 分。

(c)以上作答均正確，合計 $\frac{7}{7}$ 分

4. 一位魔術師的眼睛被矇住，手上拿著編號為 1、2、3、…、29 的二十九張牌。魔術師請觀眾任意抽取兩張牌，然後將剩下的牌交給他的助手。助手再從這些剩下的二十七張牌中挑選出兩張牌，並請其他觀眾依任意順序唸出助手所選出的牌之編號。請問魔術師與助手之間如何事先約定一些數學策略，使得魔術師能萬無一失地準確猜出觀眾手上兩張牌的編號？（四分）

【參考解法】



如圖，魔術師與他的助手可事先約定將 1 到 29 的數以順時針方向依序排列在一個圓上，且將 1 看成排在 29 後面。若觀眾抽選到兩張編號連續的牌，則助手可挑選圖中排列在這兩張牌之後的兩張編號連續的牌，例如觀眾抽到 1 與 2，則助手可選 3 與 4；若觀眾抽選到兩張編號不連續的牌，則助手一樣挑選圖中分別排列在這兩張牌之後的兩張牌，例如觀眾抽到 3 與 29，則助手可選 4 與 1。則魔術師可藉此策略判斷觀眾抽中的牌，例如魔術師知道助手選擇兩張編號連續的牌，例如 2 與 3，則可得知觀眾抽出 29 與 1；當魔術師知道助手選擇兩張編號不連續的牌，例如 2 與 29，則可得知觀眾抽出 1 與 28。

【評分標準】

(a) 只訂出助手規則，部分不可行，但沒有魔術師規則，$\frac{2}{7}$ 分

(b) 只訂出助手規則，完全可行，但沒有魔術師規則，$\frac{4}{7}$ 分

(c) 只訂出魔術師規則，部分不可行，但沒有助手規則，$\frac{2}{7}$ 分

(d) 只訂出魔術師規則，完全可行，但沒有助手規則，$\frac{4}{7}$ 分

(e) 雖訂出魔術師規則與助手規則，但兩者均部分不可行，$\frac{4}{7}$ 分

(f) 雖訂出魔術師規則與助手規則，但一個完全可行，一個部分不可行，$\frac{5}{7}$ 分

(g) 訂出魔術師規則與助手規則，完全可行，$\frac{7}{7}$ 分；魔術師規則說明太弱，給 $\frac{5}{7}$ 分或 $\frac{6}{7}$ 分

(h) 有小錯誤，$\frac{6}{7}$ 分

5. 將一個 1x1 的正方形切成三個凸多邊形，能否使得切出的每個凸多邊形的直徑都不超過：(一個凸多邊形的直徑是指它的所有對角線長度的最大值。)

(a) 1；（一分）

(b) 1.01；（二分）

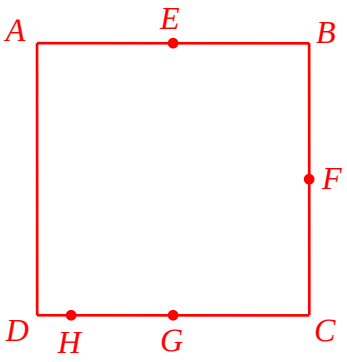
(c) 1.001？（二分）

（註：連接多邊形內任意二點之線段，若仍全部落在多邊形之內部，則稱此多邊形為凸多邊形。）

【參考解法】

(a)

令 $ABCD$ 為 1x1 的正方形。若 $ABCD$ 可以被分成三個直徑至多為 1 的凸多邊形，則由鴿籠原理可知，A、B、C、D 這四個正方形頂點至少有二個會在同一個凸多邊形，且因直徑至多為 1，故可知對角不可能在同一個凸多邊形上，否則該凸邊形直徑為將為 $\sqrt{2}$。不失一般性地可以假設 A 與 D 在同一個凸多邊形上。如右圖，分別取出 AB、BC 與 CD 的中點 E、F 與 G，以及在 GD 上取出一點 H 使 $DH=\frac{1}{8}$。

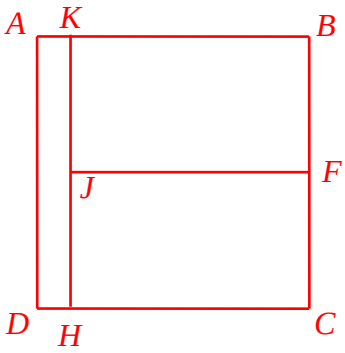


若 B 與 C 同位於第二個凸多邊形上，此時因 E 點至 C 點與 D 點的距離都是 $\frac{\sqrt{5}}{2}>1$，故 E 點必在第三個凸多邊形上；此時 H 點至 A 點的距離為 $\frac{\sqrt{65}}{8}>1$、至 E 點的距離為 $\frac{\sqrt{73}}{8}>1$、至 B 點的距離為 $\frac{\sqrt{113}}{8}>1$，故 H 點不能同時與 A、E、B 在同一塊凸多邊形上，矛盾。因此 B 與 C 必在不同的凸多邊形上，令 B 所在的凸多邊形為第二塊凸多邊形、C 所在的凸多邊形為第三塊凸多邊形。此時因 E 點至 C 點與 D 點的距離都是大於 1 以及 G 點至 A 點與 B 點的距離也都大於 1，

故 E 點在第二塊凸多邊形上且 G 點在第三塊凸多邊形上。而 F 點至 A 點與 D 點的距離也都大於 1，故 F 點在第二塊凸多邊形或第三塊凸多邊形上。若假設 F 點在第三塊凸多邊形上，則此時因 H 點至 A 點與至 B 點的距離都大於 1，且 H 點至 F 點的距離為 $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{65}}{8}>1$，故 H 點不能在第一、二、三塊凸多邊形上，矛盾；若假設 F 點在第二塊凸多邊形上，則在 AE 上另取一點 K 使 $AK=\frac{1}{8}$，利用相同推導方法仍可得到矛盾的結論，故 $ABCD$ 不可能被分成三個直徑至多為 1 的凸多邊形。

(b)

如右圖，取出 BC 的中點 F，以及在 GD 上取出一點 H 使 $DH=\frac{1}{8}$，作 $HK\perp AB$ 於 K 點、$FJ\perp HK$ 於 J 點。此時三個矩形的對角線即分別為該矩形的直徑，且



$$AH^2=1^2+\left(\frac{1}{8}\right)^2=\frac{65}{64}=1+\frac{1}{64}$$

$$FK^2=FH^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{8}\right)^2=\frac{65}{64}=1+\frac{1}{64}\text{。}$$

因 $1.01^2=\left(\frac{101}{100}\right)^2=\frac{10201}{10000}=1+\frac{201}{10000}$ 以及 $\frac{1}{64}<\frac{1}{50}<\frac{200}{10000}<\frac{201}{10000}$，故該圖之三個矩形直徑皆未超過 1.01。

(c)

同(a)，因 $\frac{\sqrt{65}}{8}>\frac{1001}{1000}=1.001$，故只須將證明過程中的直徑不超過 1 改為不超過 1.001 即可證出。

【評分標準】

(a)

(1) 利用「1×1 正方形切成三個凸多邊形，必有至少其中一個同時包含原正方形的一條邊和一個直角，則其斜邊必大於 1，即必有一個凸多邊形的直徑大於 1，故不可能。」此概念，$\frac{7}{7}$ 分

(2) 敘述中未排除其中一個凸多邊形包含正方形兩個對角的情況，$\frac{5}{7}$ 分

(3) 敘述中未提到直角或完整一邊，$\frac{2}{7}$ 分

(4) 僅舉一例而推得不可能，不給分

(5) 只說凸多邊形至多包含正方形的 2 個角，$\frac{2}{7}$ 分

(6) 只說凸多邊形不能同時包含正方形的 3 個角，$\frac{2}{7}$ 分

(7) 由凸多邊形的切法討論，至少需 2 種才給分，

若切法交代不清楚，一律至多只給 $\frac{2}{7}$ 分，少一種扣 $\frac{1}{7}$ 分，扣到 $\frac{2}{7}$ 分為止

若由因三角形無對角線而直接排除凸多邊形為三角形時的情況，不扣分

若說因三角形不是多邊形而直接排除凸多邊形為三角形時的情況，扣 $\frac{1}{7}$ 分

(b)

證明可能存在但未舉例，$\frac{2}{7}$ 分

僅舉例但未證實滿足題意，$\frac{3}{7}$ 分

舉例並證明滿足題意，$\frac{7}{7}$ 分，若不完整，$\frac{5}{7}$ 分

(c)

造出所有三個直徑相等的凸多邊形中直徑最小者，但未證明是最小，$\frac{4}{7}$ 分

⊙ 若同時證(a)、(c)，則(a)、(c)合併計分並依(a)的評分標準評分。

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間四小時。》