注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。**可直接下載而不須申請**。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

**Notice:**

**Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.**

**Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN** ccmp@seed.net.tw

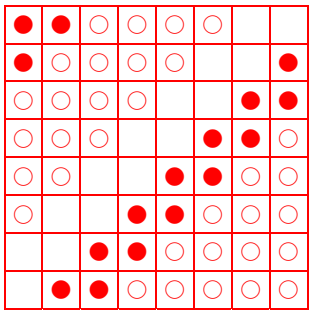
# International Mathematics Tournament of Towns
# 環球城市數學競賽
## 2007 秋季賽　國中組　初級卷　2007/10/21

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 在 8×8 方格表的小方格內放置黑色或白色的棋子，每個小方格內至多只能放一個棋子，使得每行且每列白色棋子的數量都是黑色棋子的數量之 2 倍。在滿足上述條件的所有放置方法中，請問如何放置白色棋子和黑色棋子才能使得棋子的總數量最多？（三分）

【參考解法】

因為每行白色棋子的數量都是黑色棋子的數量之 2 倍，故每行棋子的數量一定是 3 的倍數；又因每行都有 8 格，所以每行棋子最多只能有 6 個。此方格表共有 8 行，因此棋子的總數最多為 48 個。如下圖所示，48 個棋子是可以完成的：



【評分標準】

(a) 證明 6×8＝48 最多，$\frac{3}{7}$ 分

只給答案，$\frac{1}{7}$ 分

(b) 構造正確的例子，$\frac{4}{7}$ 分

2. 在黑板上寫下兩個實數：1 與 $x$（其中 $x$ 不是整數）。允許下列操作：

(1) 可以寫下一個等於黑板上任意二個數之和或差的數。

(2) 可以寫下一個黑板上任意一個數的倒數。

請問能不能進行有限次上述操作後可以寫下 $x^2$？（四分）

【參考解法】

可先寫下 $x+1$ 與 $x-1$。接著可寫下 $\frac{1}{x+1}$、$\frac{1}{x-1}$ 以及這兩數之差 $\frac{2}{x^2-1}$。因此可得其倒數 $\frac{x^2-1}{2}$。可再作一次 $\frac{x^2-1}{2}$ 使黑板上有兩個 $\frac{x^2-1}{2}$，將這兩個 $\frac{x^2-1}{2}$ 相加即得 $x^2-1$，最後再加上原有的 1 便可得到 $x^2$。

【評分標準】

1. 寫出 $\frac{1}{x-1}$、$\frac{1}{x}$、$\frac{1}{x+1}$ 其中 2 個，$\frac{2}{7}$ 分

2. 寫出 $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}$ 計算正確，$\frac{2}{7}$ 分

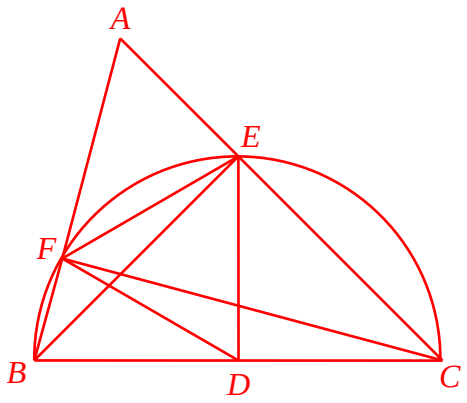
3. 寫出 $\frac{x^2-1}{2}$，要註明作 2 次，$\frac{2}{7}$ 分（未註明作 2 次，扣 $\frac{1}{7}$ 分）

4. 導出 $x^2$，$\frac{1}{7}$ 分

3. 已知有一個三角形的二個邊上的垂足及第三邊上的中點構成一個正三角形。請問是否可以保證原來的三角形是正三角形？（四分）
（註：三角形三個邊上的垂足是指從三角形的頂點作到對邊的垂線與此對邊之交點）

【參考解法】

令△$DEF$ 為正三角形。如圖，以 $D$ 為圓心 $DE$ 為半徑作半圓，其中該半圓中的直徑 $BC$ 垂直 $DE$，點 $F$ 與點 $B$ 之距離小於與點 $C$ 之距離。因 $DF=DE$，故點 $F$ 在半圓的圓周上。延長線段 $BF$ 與線段 $CE$，取兩條延長線的交點為 $A$ 點。因為 $\angle BEC=90^\circ=\angle BFC$，故 $BE$ 與 $CF$ 為△$ABC$ 的兩條高，即 $E$、$F$ 分別為 $AC$、$AB$ 上的垂足；因 $BD=CD$，$D$ 為△$ABC$ 的 $BC$ 邊之中點。但因 $A$ 位於 $CE$ 的延長線上且 $DE$ 為 $BC$ 的中垂線，故 $AB<AC$，即△$ABC$ 不是正三角形。




【評分標準】

(a) 給出反例，$\frac{4}{7}$ 分

(b) 論證給出的例子皆滿足條件且不是正三角形，$\frac{3}{7}$ 分

4. 在 29x29 的方格表內填入正整數 1、2、3、…、29，每個小方格內只能填入一個數，這二十九個數都恰好被填入 29 次。已知一條主對角線方格的上方所有小方格內的數之總和恰好是它的下方所有小方格內的數之總和的三倍。請問在此方格表正中心的小方格內所填入的數是什麼？（五分）
(註：主對角線方格的上方及下方的所有小方格並不包括主對角線上的方格)

【參考解法】

可知在主對角線上共需填上 29 個數，在主對角線上方與下方則各需填上 29×14 個數。因此在填入主對角線上方小方格內 29×14 個數的所有方法中，總和的最大值為 $29(16+17+18+\cdots+29)=29\times7\times45$；而在填入主對角線下方小方格內 29×14 個數的所有方法中，總和的最小值為 $29(1+2+3+\cdots+14)=29\times7\times15$。此

時可發現前者恰為後者的三倍，因此所有能填的數中，所有的 16 到 29 共 29×14 個數都必須填在主對角線上方並且所有的 1 到 14 共 29×14 個數都必須填在主對角線下方，否則主對角線方格的上方所有小方格內的數之總和將不小於它的下方所有小方格內的數之總和的三倍，換言之，主對角線上的數都必須是 15，故正中心的小方格內必須填入 15。

【評分標準】

(a) 只給答案或理由錯誤，不給分。

(b) 算出主對角線方格的上方所有小方格內的數之總和的最大值及下方所有小方格內的數之總和的最小值，$\frac{3}{7}$ 分

說明因上方數之總和的最大值與下方數之總和的最小值的比為 3：1，因此答案為 15，$\frac{4}{7}$ 分

(c) 直接構造出 3×3、5×5、7×7 的情況而推得 29×29 時為 15，$\frac{1}{7}$ 分

(d) 直接舉例或構造出來並算出上方所有小方格內的數之總和與下方所有小方格內的數之總和，但未說明此時恰為最大值與最小值，$\frac{4}{7}$ 分

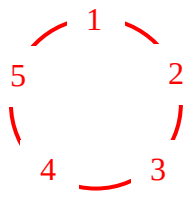
(e) 僅由 1 組 1+2+3+…+14：16+17+18+…+29＝1：3 而得到 15，$\frac{1}{7}$ 分

(f) 直接取對角線全為 15，而此時其餘方格內的數之總和恰可分為 3：1 兩個部分，而未討論是否真的存在這種填法，$\frac{1}{7}$ 分

(g) 直接舉例但未算出上方所有小方格內的數之總和與下方所有小方格內的數之總和，$\frac{2}{7}$ 分

5. 一位魔術師的眼睛被矇住，手上拿著編號為 1、2、3、4、5 的五張牌。魔術師請觀眾任意抽取兩張牌，然後將剩下的牌交給他的助手。助手再從這三張牌中挑選出兩張牌，並請其他觀眾依任意順序唸出助手所選出的牌之編號。請問魔術師與助手之間如何事先約定一些數學策略，使得魔術師能萬無一失地準確猜出觀眾手上兩張牌的編號？（五分）

【參考解法】




如圖，魔術師與他的助手可事先約定將 1 到 5 的數字以順時針方向依序排列在一個圓上，且將 1 看成排在 5 後面。若觀眾抽選到兩張編號連續的牌，則助手可挑選圖中排列在這兩張牌之後的兩張編號連續的牌，例如觀眾抽到 3 與 4，則助手可選 5 與 1；若觀眾抽選到兩張編號不連續的牌，則助手一樣挑選圖中分別排列在這兩張牌之後的兩張牌，例如觀眾抽到 3 與 5，則助手可選 4 與 1。則魔術師可藉此策略判斷觀眾抽中的牌，例如魔術師知道助手選擇兩張編號連續的牌，例如 2 與 3，則可得知觀眾抽出 5 與 1；當魔術師知道助手選擇兩張編號不連續的

牌，例如 2 與 5，則可得知觀眾抽出 1 與 4。

【評分標準】

(a)

1. 訂出若（$a, b$）不連續時拿出（$a+1, b+1$）之策略，（$a-1, b-1$）亦可，$\frac{2}{7}$ 分

2. 訂出若（$a, a+1$）時拿出（$a+2 \pmod 5, a+3 \pmod 5$）之策略，
   （$a-1 \pmod 5, a-2 \pmod 5$）亦可，$\frac{2}{7}$ 分

3. 聲明此時是 1 對 1，故魔術師可倒推知，$\frac{3}{7}$ 分

(b)若硬訂出十種對應方式且為 1 對 1，但無規則且不說明魔術師之方式，$\frac{3}{7}$ 分

若硬訂出十種對應方式且為 1 對 1，但無規則且有說明魔術師之方式，$\frac{5}{7}$ 分

(c)若訂出其他有規律的方式，$\frac{4}{7}$ 分

再強調出 1 對 1 及魔術師之對應策略，再得 $\frac{3}{7}$ 分

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間四小時。》