注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。**可直接下載而不須申請**。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

International Mathematics Tournament of Towns
環球城市數學競賽
2006 秋季賽　高中組　初級卷　2006/10/22

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 小丁對在黑板上的三個正整數 x、y 及 z 依序進行以下的操作：
（1）任選其中二個數，將它們的乘積寫在筆記本上；
（2）擦去黑板上操作(1)中未選到的數，替換爲此數減 1。
小丁繼續上述的操作，直到黑板上出現一個數等於 0 爲止。請問最後小丁筆記本上的數的總和是多少？（四分）

參考解法 1：

觀察操作一次：假定該次操作記在筆記本上的數為 xy，黑板上的數則變為 x、y 及 $z-1$。故有：

「此時黑板上三數的乘積」＋「該次操作記在筆記本上的數」

$=xy(z-1)+xy$

$=xyz$

由此可知，「操作後黑板上三數的乘積」與「該次操作記在筆記本上的數」的和為「操作前黑板上三數的乘積」。假定共操作 n 次，而第 m 次操作後黑板上得到的三個數為 a_m、b_m、c_m，記在筆記本上的數為 s_m，則可得關係式 $a_m b_m c_m + s_m = a_{m-1} b_{m-1} c_{m-1}$。由於最後一次操作完畢時為黑板上有 0，所以最後一次記在筆記本上的數就是最後一次操作前黑板上三數的乘積，即 $s_n = a_{n-1} b_{n-1} c_{n-1}$。

筆記本上的數的總和

$= s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-2} + s_{n-1} + s_n$

$= s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-2} + s_{n-1} + a_{n-1} b_{n-1} c_{n-1}$

$= s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-2} + a_{n-2} b_{n-2} c_{n-2}$

$\vdots$

$= s_1 + s_2 + a_2 b_2 c_2$

$= s_1 + a_1 b_1 c_1$

＝黑板上原始三數的乘積

$=xyz$

所以筆記本上的數的總和為 xyz。

參考解法 2：

小丁筆記本上所寫的數的總和為原來所寫三數之乘積。我們可針對直到黑板上出現一個數等於 0 為止的操作次數作數學歸納法。

令 n 為黑板上出現一個數等於 0 為止的總操作次數。

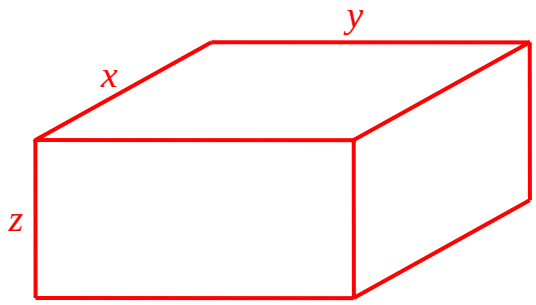
當 $n=1$ 時，未被挑選的數必為 1，故此三數的乘積即為被小丁挑選出的兩個數的乘積，即為小丁筆記本上所寫的數。

假設 $n=k$ 時成立。

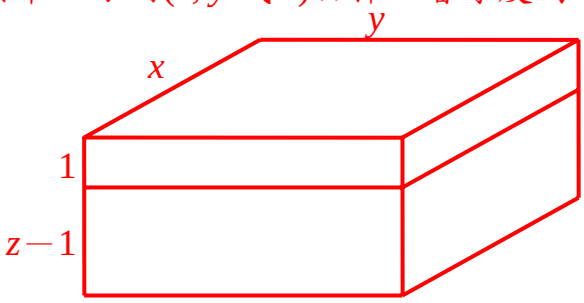
當 $n=k+1$ 時，假設黑板上原來所寫之三數為 x、y 與 z，經由第一次操作，小丁在筆記本上所寫下的數為 xy，在黑板上的數換成 x、y 與 $z-1$。此時到操作完畢還需操作 k 次，而根據歸納假設，由此時到操作結束時筆記本上所寫的數的總和為 $xy(z-1)$。因此小丁筆記本上所寫的數的總和為 $xy+xy(z-1)=xyz$，得證。

參考解法 3：(新竹實驗中學江盛浩同學的解法)

每一次黑板上出現的的三個正整數 x、y 及 z 可視為一個長方體的長、寬、高：



每操作一次，為選取其中兩個數（假設為 x、y）後將第三數（假設為 z）減 1，可看成將該長方體沿其中一方向(x, y 或 z)切掉一層厚度為 1 的薄片：



而筆記本上的數字即為切掉薄片的體積。當黑板上出現數字為 0 時，即代表已經將原先的長方體切完了，此時筆記本上的數字的總和就是原先長方體的體積 xyz。

<評分標準>

1 推得在任一次操作後，筆記本上的數的總和以及黑板上的三個數的乘積，恆為定數 xyz，5/7。

2 再由 x、y、z 為正整數可知有限次之後必有一數為 0，此時筆記本總和為 xyz，2/7。

註：1.只試 x、y、z 中的一數，連續幾次後停止，故總和為 xyz，2/7。

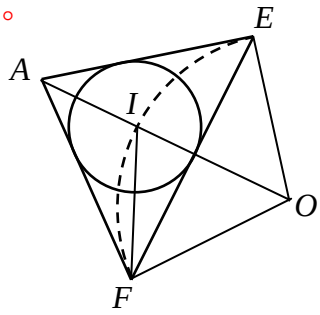
2.在 x、y、z 中交替 a 次、b 次、c 次後，其結果為 xyz，3/7。

2. 一個圓內切於一個四邊形，依序將相鄰的切點用線段連接，可在原四邊形的四個角落切出四個三角形，作這四個三角形的內切圓。試證：由這四個內切圓的圓心所圍成的四邊形之對角線互相垂直。（四分）

參考解法：

令四邊形為 $ABCD$，內切四邊形 $ABCD$ 的圓的圓心為 O，切點分別為 E, F, G, H。

觀察三角形 AEF。因 $\angle AFO=\angle AEO=90°$，$OF=OE$，以及 $AF=AE$，故 $\triangle AOE$ 與 $\triangle AOF$ 為兩個全等三角形，所以 OA 為 $\angle EAF$ 的角平分線。



令 OA 交圓 O 的弧於 I 點，則有 $\angle AOE=2\angle IFE$。

又因 $\angle AFO=\angle AEO=90°$，點 A、F、O、E 四點共圓，

故 $\angle AFE=\angle AOE=2\angle IFE$，即 FI 為 $\angle AFE$ 的角平分線

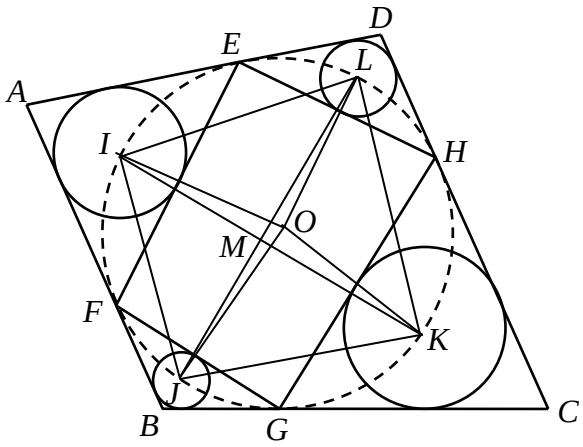
所以 I 為 $\triangle AEF$ 的內心，即 $\triangle AEF$ 的內切圓圓心在圓 O 上。

且因 $\triangle AOE$ 與 $\triangle AOF$ 為兩個全等三角形，所以

$\angle AOF=\angle AOE$，即 I 平分弧 EF。

同理，三角形 BFG、CGH、DHE 的內心也都在圓 O 上且分別平分弧 FG、GH、HE。

設點 M 為對角線 IK、JL 交點，則



$$\angle LMK=\frac{1}{2}(\text{弧 } IFB+\text{弧 } LHK)$$

$$=\frac{1}{4}(\text{弧 } EIF+\text{弧 } FBG+\text{弧 } GKH+\text{弧 } HLE)$$

$=90°$ 。

故對角線 IK、JL 互相垂直。

<評分標準>

1° 證明點 A、F、O、E 四點共圓，得 2/7 分。

2° 證明內心在圓上，得 3/7。

3° 再推論對角線垂直，得 2/7。

3. 在 2006×2006 的方格表中，不重複地隨意將數 1，2，3，…，2006^2 填入每個小方格內。試證：必定存在二個有共同邊或共同頂點的小方格內的數之和可被 4 整除。（四分）

參考解法：

因為此方格表內共填入 $2006^2=4\times1003^2$ 個連續的數，所填入的數中可被 4 整除的數、被 4 除餘 1 的數、被 4 除餘 2 的數以及被 4 除餘 3 的數的個數都一樣多，各有 1003^2 個。將所有數用該數被 4 除以後的餘數代替（即取模 4），則可觀察出在 2×2 的方格內，若不存在二個有共同邊或共同頂點的小方格內的數之和可被 4 整除，則最多只能各有一個 0 與一個 2。如果把這個方格表看成由 1003^2 個 2×2 的方格所組成，則每一個 2×2 的方格內必須恰有一個 0 與一個 2，且不能同時有 1 與 3，故只可能有以下四種情形(對稱情況視為相同)：

0	1
1	2

0	3
3	2

0	1
2	1

0	3
2	3

可知 1 出現的次數必為偶數。但現在有 1003^2 個 1，因此不可能不存在二個有共

同邊或共同頂點的小方格內的數之和可被 4 整除。

<評分標準>
1 討論至每一個 2×2 的方格內必須恰有一個 0 與一個 2，且不能同時有 1 與 3，故只可能有四種情形，得 2/7。
2 再推論至結論，得 5/7。

4. 已知a_1，a_2，…爲無窮等差數列及b_1，b_2，…爲無窮等比數列。若這個等比數列中的每一項都是等差數列中的某一項，試證：這個等比數列的公比爲整數。（四分）

參考解法：

取該無窮等差數列的公差為 d，而該無窮等比數列的公比為 r。若 $b_1=a_k$，$b_2=b_1r=a_kr=a_k+md$，$b_3=b_2r=a_kr^2=a_k+nd$，其中 n、m 為整數且 $n>m$，可得

$b_2-b_1=b_1(r-1)=md$

$b_3-b_2=b_1r(r-1)=(n-m)d$

故 $r=\frac{n-m}{m}$ 為一個有理數。

由 $b_3=b_2r=a_kr^2=a_k+nd$ 可知 $r(a_k+md)=a_k+nd$，故 $\frac{a_k}{d}=\frac{n-rm}{r-1}$ 也為有理數。

取 $\frac{a_k}{d}=\frac{q}{p}$，其中 p、q 為互質的整數。

將無窮等差數列每項都除以 d，可得到一個首項為 $\frac{a_1}{d}$，公差為 1 的無窮等差數列，因此這個新的無窮等差數列中的第 $k+1$ 項必可表示為 $\frac{q+kp}{p}$ 的型態。此時，也將無窮等比數列每項都除以 d，則可得到一個首項為 $\frac{b_1}{d}$，公比為 r 的無窮等差數列，而這個新的無窮等比數列中的每一項也都是新的等差數列中的某一項，且第 $h+1$ 項可表為 $\frac{b_1}{d}r^h$ 的型態。若 r 不為整數，則可表示為 $\frac{v}{u}$，其中 u、v 為互質的整數。故 $\frac{b_1}{d}r^h=\frac{b_1v^h}{du^h}$。因 b_1、d 都是固定的數，所以一定可以取到一個足夠大的 h 使得第 $h+1$ 項化為最簡分數後的分母大於 p，即第 $h+1$ 項不在新的無窮等差數列中，矛盾。故 r 為整數。

<評分標準>

1° $\forall n\in N$，$\exists m\in N$，ɜ $b_n=a_m$ 即 $b_1r^{n-1}=a_1+(m-1)d$ $\Rightarrow\frac{b_1r^{n-1}-a_1+d}{d}=$項數 $m\in N$

$\Rightarrow\frac{b_1r^{n-1}-a_1}{d}\in N$，$\forall n\in N$

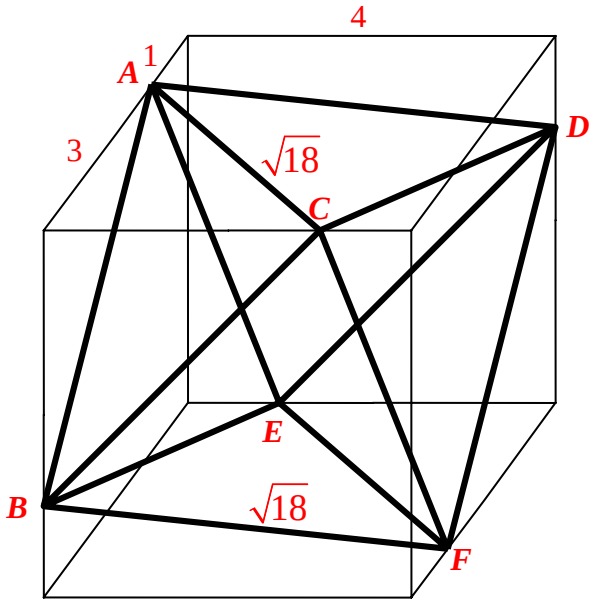
$\Rightarrow$項數的差 $\frac{b_1r-a_1}{d}-\frac{b_1-a_1}{d}=\frac{b_1(r-1)}{d}\in Z$ ，證至此，得 2/7 分

2° $\frac{b_1r^n-a_1}{d}-\frac{b_1r^{n-1}-a_1}{d}=\frac{b_1r^{n-1}(r-1)}{d}=\frac{b_1(r-1)}{d}\cdot r^{n-1}\in Z$，$\forall n\in N \Rightarrow r\in Q$ ，證至此，得 5/7 分

3° 設 $r=\frac{q}{p}$，$(p,q)=1$ $\because \frac{b_1(r-1)}{d}\cdot r^{n-1}=\frac{b_1(r-1)}{d}\cdot\frac{q^{n-1}}{p^{n-1}}\in Z \Rightarrow p^{n-1}\mid\frac{b_1(r-1)}{d}<\infty$ 若 $p\neq1$

則$\exists\, n\in N \ni p^{n-1}>\frac{b_1(r-1)}{d} \Rightarrow \frac{b_1(r-1)}{d}\cdot r^{n-1}=\frac{b_1(r-1)}{d}\cdot\frac{q^{n-1}}{p^{n-1}}\notin Z \rightarrow\leftarrow \Rightarrow p=1$ 即 $r\in Z$，證至此，得 7/7 分

5. 能否在一個正六面體內找出一個內接正八面體使得這個正八面體的頂點都落在正六面體的稜邊上？（註：一個正八面體有六個頂點，每個頂點上恰有 4 個正三角形在此交會。）（五分）



參考解法：

令正六面體邊長為 4，如右圖，在正六面體的稜邊上取出 ***A***、***B***、***C***、***D***、***E***、***F*** 六個點，這六個點離最接近的正六面體頂點距離都是 1，則有：

$AB=AC=BC=DE=DF=EF$

$=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}$

$AD=AE=BE=BF=CD=CF$

$=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{1^2+4^2}\right)^2}=\sqrt{18}$

故△***ABC***、△***ACD***、△***ADE***、△***AEB***、△***FBC***、△***FCD***、△***FDE***、△***FBE*** 都為正三角形，故此八面體為正八面體。

<評分標準>

1° 給圖形，並標示正八面體 G 的每個落在正六面體 F 的稜邊上的頂點到稜邊兩端點之距離比為 1：3 ，說明至此，得 4/7 分

2° 證明正八面體 G 之對角線兩兩互相垂直，若正八面體 G 在正六面體 F 內，則 G 之每一條對角線必過 F 之中心 $Q(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$。設 G 之六頂點為 $A(a,0,0)$，$B(0,b,0)$，$C(0,0,c)$，$A'(1-a,1,1)$，$B'(1,1-b,1)$，$C'(1,1,1-c)$，

$\because \overrightarrow{AA'}$、$\overrightarrow{BB'}$、$\overrightarrow{CC'}$ 兩兩互相垂直 $\therefore \overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{BB'}=1-2a+1-2b+1=0$

$\overrightarrow{BB'}\cdot\overrightarrow{CC'}=1+1-2b+1-2c=0 \Rightarrow a+b=b+c=c+a=\frac{3}{2} \Rightarrow a=b=c=\frac{3}{4}$

$\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{CC'}=1-2a+1+1-2c=0$ ⇒正八面體 G 的每個頂點都落在正六面體 F 的稜邊上。證至此，或證明△***ABC***、△***ACD***、△***ADE***、△***AEB***、△***FBC***、△***FCD***、△***FDE***、△***FBE*** 都為正三角形，故此八面體為正八面體，得 7/7 分