注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。**可直接下載而不須申請**。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

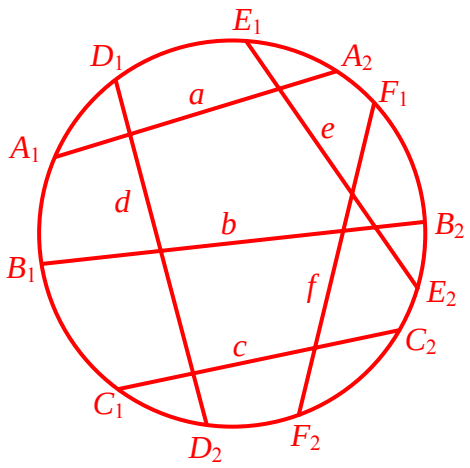
International Mathematics Tournament of Towns
環球城市數學競賽
2006 秋季賽　高中組　高級卷　29/10/2006

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 每當小金遇到一個人，他都試圖瞭解誰與誰彼此之間互相認識。爲了記錄這些關係，他畫了一個圓，每個人用一條弦代表，並且使二個互相認識的人所代表的弦相交（可能相交於端點），若二人互不認識則其所代表的弦互不相交。小金認爲對於任何公司裡的人員，他都可以用這項的方式做紀錄。請問小金的想法正確嗎？ (四分)

<參考解法>

小金說法不正確。令 a、b、c 互不相識，d 與 a、b、c 都相識。不失一般性，可用下圖表示：當 e 只與 a、b 認識，f 只與 b、c 認識，g 只與 a、c 認識，則 e、f、g 至少有一個無法用此方式做紀錄。



證明：

假設 e 只與 a、b 認識，f 只與 b、c 認識。

若令弦 e 的兩個端點分別為 E_1、E_2，因 e 與 a、b 認識，不失一般性地可令 E_1 與 A_1A_2 在 b 之同側，則 E_2 與 A_1A_2 在 b 之異側。

令弦 f 的兩個端點分別為 F_1、F_2，因 f 與 b、c 認識，不失一般性地可令 F_2 與 C_1C_2 在 b 之同側，則 F_1 與 C_1C_2 在 b 之異側。

令弦 g 的兩個端點分別為 G_1、G_2，因 g 與 a、c 認識，不失一般性地可令 G_1 與 A_1A_2 在 c 之同側，即 G_1 與 A_1A_2 在 b 之同側，而 G_2 與 A_1A_2 在 c 之異側，即 G_1 與 A_1A_2 在 b 之異側。

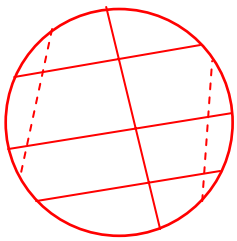
此時 g 與 b 相交，即 g 與 b 也認識，與 g 只認識 a、c 矛盾，故小金說法不正確。

<評分標準>

Type Ⅰ

1° 先讓一人與互不相識的三人相識（需證明僅一種畫法）

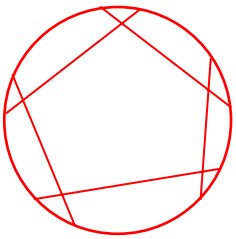
2° 再讓互不相識的三人，其中兩人只與另外的人相識，則此種情形無法畫出。



Type Ⅱ

1° ABCDE 五人只與相鄰的人認識（A 與 E、B 識，E 與 D、A 識）

2° 第六人若與 A、B、C、D、E 均認識也無法畫出。



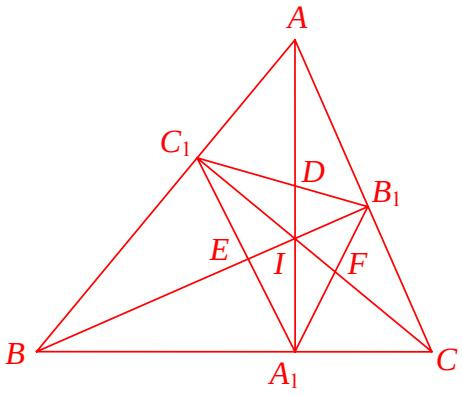
舉出例子得 3/7 分。

但若要得 7/7 分，需討論完整可能之畫法，說明在各種畫法下無法完成。

2. 已知三角形 ABC 爲銳角三角形，分別在邊 BC、AC 和 AB 上取點 A_1 、 B_1 和 C_1 ，使得射線 A_1A 、 B_1B 和 C_1C 分別爲三角形 $A_1B_1C_1$ 的角平分線。試證線段 A_1A 、 B_1B 和 C_1C 爲三角形 ABC 的三條高。(六分)

<參考解法>

令 $B_1C_1=a$、$C_1A_1=b$、$A_1B_1=c$ 以及 I 為△$A_1B_1C_1$ 的內心。



1° 對△B_1IF 而言，直線 BC 交其各邊之延長線，由孟式定理可得：

$$\frac{B_1B}{BI}\times\frac{IC}{CF}\times\frac{FA_1}{A_1B_1}=1 \quad \text{.....（1）}$$

又由角平分線 C_1F 可知 $\frac{FB_1}{FA_1}=\frac{a}{b}$，即得 $\frac{A_1B_1}{FA_1}=\frac{a+b}{b}$ ，

代入（1）式得

$$\frac{IC}{CF}=\frac{BI}{B_1B}\times\frac{a+b}{b} \quad \text{.....（Ⅰ）}$$

2° 對△A_1IE 而言，直線 AB 交其各邊之延長線，由孟式定理可得：

$$\frac{A_1A}{AI}\times\frac{IB}{BE}\times\frac{EC_1}{C_1A_1}=1 \quad \text{.....（2）}$$

又由角平分線 B_1E 可知 $\frac{EA_1}{EC_1}=\frac{c}{a}$ ，即得 $\frac{C_1A_1}{EC_1}=\frac{a+c}{a}$ ， 代入（2）式得

$$\frac{A_1A}{AI}=\frac{BE}{IB}\times\frac{a+c}{a} \quad \text{.....（Ⅱ）}$$

3° 對△A_1IF 而言，直線 AC 交其各邊之延長線，由孟式定理可得：

$$\frac{A_1A}{AI}\times\frac{IC}{CF}\times\frac{FB_1}{B_1A_1}=1 \quad \text{.....（3）}$$

將（Ⅰ）、（Ⅱ）代入（3）式得

$$\frac{BE}{IB}\times\frac{a+c}{a}\times\frac{BI}{B_1B}\times\frac{a+b}{b}\times\frac{a}{a+b}=1$$

故得 $\frac{BE}{B_1B}=\frac{b}{a+c}$

4° △A_1B_1E 中，$\frac{A_1B_1}{A_1E}=\frac{c}{\frac{c}{a+c}\times b}=\frac{a+c}{b}$ 。

5° 由 3°與 4°可知 $\frac{A_1B_1}{A_1E}=\frac{BB_1}{BE}$ ，即 A_1B 為 $\angle B_1A_1C_1$ 的外角平分線，所以

$$\angle C_1A_1B=\angle B_1A_1C$$

因此 $\angle AA_1B=\angle AA_1C=90°$，即 AA_1 與 BC 垂直。

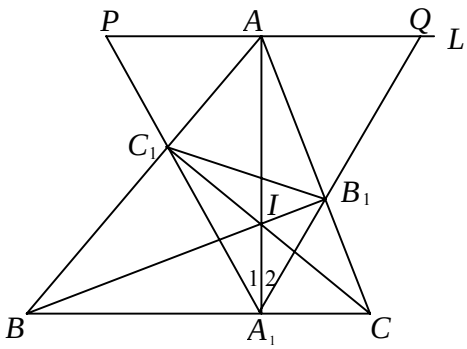
6° 同理可證，BB_1 與 CA 垂直、CC_1 與 AB 垂直，因此 I 為△ABC 的垂心。

<評分標準>

過 A 作直線 $L\,//\,\overline{BC}$ ，延長 $\overline{A_1C_1}$ 、 $\overline{A_1B_1}$ 交直線 L 於 P、Q，

∵ $\overrightarrow{AA_1}$ 、 $\overrightarrow{BB_1}$ 、 $\overrightarrow{CC_1}$ 分別為$\Delta A_1B_1C_1$ 之角平分線

∴ $\overrightarrow{AA_1}$ 、 $\overrightarrow{BB_1}$ 、 $\overrightarrow{CC_1}$ 共點，由 ***Ceva 定理*** 知



$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}}\times\frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}}\times\frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}}=1\cdots\cdots(1)$　　(證的此式，得 2/7 分)

$\because L\,//\,\overline{BC}\ \therefore\Delta AQB_1\sim\Delta CA_1B_1$ 且$\Delta APC_1\sim\Delta BA_1C_1$

$\Rightarrow\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}}=\frac{\overline{AQ}}{\overline{CA_1}}$ 且 $\frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}}=\frac{\overline{A_1B}}{\overline{PA}}$　　(證得此式，得 4/7 分)

代入(1) $\Rightarrow\frac{\overline{AQ}}{\overline{CA_1}}\times\frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}}\times\frac{\overline{A_1B}}{\overline{PA}}=1\ \Rightarrow\overline{PA}=\overline{AQ}$　已知$\angle1=\angle2\ \Rightarrow\frac{\overline{QA}}{\overline{AP}}=\frac{\overline{QA_1}}{\overline{A_1P}}\ \therefore\ \overline{A_1Q}=\overline{A_1P}$

$\Rightarrow\overline{AA_1}\perp\overline{PQ}$　但 $L\,//\,\overline{BC}\ \therefore\overline{AA_1}\perp\overline{BC}$　同理 $\overline{BB_1}\perp\overline{CA}$ 、$\overline{CC_1}\perp\overline{AB}$ 。　　(證畢，得 7/7 分)

3. 數 a（$a=0.12457\ldots$）的第 n 位數等於 $n\sqrt{2}$ 整數部分的首位數。試證 a 是個無理數。(六分)

<參考解法 1>

若實數 a 是有理數，則 a 的小數部分的表示法有週期性，但是 $10^x\times\sqrt{2}$ 到 $1.2\times10^x\times\sqrt{2}$ 之間所有的數的整數部分之首位數都是 1，以及 $2\times10^x\times\sqrt{2}$ 到 $2.1\times10^x\times\sqrt{2}$ 之間所有的數的整數部分之首位數都是 2，而 10^x 可以任意大，故其間有無限多個 1 和無限多個 2，無法有週期性，矛盾。所以 a 是無理數。

<參考解法 2>

分析：先了解 a 的長相，並參照下列數據：

$$\frac{10}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}=7.0710681\cdots\ ;\ \frac{20}{\sqrt{2}}=2\left(5\sqrt{2}\right)\ ;\ \frac{30}{\sqrt{2}}=3\left(5\sqrt{2}\right)\ ;$$

$$\frac{10^2}{\sqrt{2}}=10\left(5\sqrt{2}\right)\ ;\ \frac{10^3}{\sqrt{2}}=10^2\left(5\sqrt{2}\right)\ ;\ \frac{10^{k+1}}{\sqrt{2}}=10^k\left(5\sqrt{2}\right)\ ;$$

$\left[5\sqrt{2}\right]=7$（一位數）；$\left[10\left(5\sqrt{2}\right)\right]=70$（二位數）；$\left[10^2\left(5\sqrt{2}\right)\right]=707$（三位數）；

一般而言：$\left[10^k\left(5\sqrt{2}\right)\right]$ 是首位數為 7 的 k+1 位數。

(1) $\left[n\sqrt{2}\right]$ 是一位數：

$1<n\sqrt{2}<10\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}<n<\frac{10}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]+1\le n\le\left[\frac{10}{\sqrt{2}}\right]\Leftrightarrow1\le n\le7$ 。其中

$1\sqrt{2}=1.414\cdots\Rightarrow a_1=1$ ； $2\sqrt{2}=2.828\cdots\Rightarrow a_2=2$ ； $3\sqrt{2}=4.242\cdots\Rightarrow a_3=4$ ；

$4\sqrt{2}=5.656\cdots\Rightarrow a_4=5$ ； $5\sqrt{2}=7.070\cdots\Rightarrow a_5=7$ ； $6\sqrt{2}=8.484\cdots\Rightarrow a_6=8$ ；

$7\sqrt{2}=9.899\cdots\Rightarrow a_7=9$ ；

故　　$a=0.\underbrace{1245789}_{\text{7個數}}\cdots$

(2) $\left[n\sqrt{2}\right]$ 是二位數：

$10<n\sqrt{2}<100\Leftrightarrow\left[\frac{10}{\sqrt{2}}\right]+1\le n\le\left[\frac{10^2}{\sqrt{2}}\right]\Leftrightarrow8\le n\le70$ 。其中

(a) $10<n\sqrt{2}<20\Leftrightarrow\left[\frac{10}{\sqrt{2}}\right]+1\le n\le\left[\frac{20}{\sqrt{2}}\right]\Leftrightarrow8\le n\le14$ 。

即 $a_8=a_9=a_{10}=\cdots=a_{14}=1$（7 個相鄰數字皆為 1）

(b) $10<n\sqrt{2}<30 \Leftrightarrow 15\le n\le 21$。

即 $a_{15}=a_{16}=a_{17}=\cdots=a_{21}=2$（7 個相鄰數字皆為 2）

⋮

(c) $90<n\sqrt{2}<100 \Leftrightarrow 64\le n\le 70$。

即 $a_{64}=a_{65}=a_{66}=\cdots=a_{70}=9$（7 個相鄰數字皆為 9）

故 $a=0.\underbrace{1245789}_{\text{7個數}}\underbrace{111\cdots1}_{\text{7個1}}\underbrace{222\cdots2}_{\text{7個2}}\underbrace{333\cdots3}_{\text{7個3}}\cdots\underbrace{888\cdots8}_{\text{7個8}}\underbrace{999\cdots9}_{\text{7個9}}\cdots$

(3) $\left[n\sqrt{2}\right]$ 是三位數：

$10^2<n\sqrt{2}<10^3 \Leftrightarrow \left[\frac{10^2}{\sqrt{2}}\right]+1\le n\le\left[\frac{10^3}{\sqrt{2}}\right] \Leftrightarrow 71\le n\le 707$。其中

(a) $10^2<n\sqrt{2}<2\times10^2 \Leftrightarrow 71\le n\le 141$。

即 $a_{71}=a_{72}=a_{73}=\cdots=a_{141}=1$（70 個相鄰數字皆為 1）

(b) $2\times10^2<n\sqrt{2}<3\times10^2 \Leftrightarrow 142\le n\le 212$。

即 $a_{142}=a_{143}=a_{144}=\cdots=a_{212}=2$（70 個相鄰數字皆為 2）

⋮

(c) $9\times10^2<n\sqrt{2}<10^3 \Leftrightarrow 637\le n\le 707$。

即 $a_{637}=a_{638}=a_{639}=\cdots=a_{707}=9$（70 個相鄰數字皆為 9）

故

$a=0.\underbrace{1245789}_{\text{7個數}}\underbrace{111\cdots1}_{\text{7個1}}\underbrace{222\cdots2}_{\text{7個2}}\underbrace{333\cdots3}_{\text{7個3}}\cdots\underbrace{888\cdots8}_{\text{7個8}}\underbrace{999\cdots9}_{\text{7個9}}\underbrace{111\cdots1}_{\text{70個1}}\underbrace{222\cdots2}_{\text{70個2}}\underbrace{333\cdots3}_{\text{70個3}}\cdots\underbrace{888\cdots8}_{\text{70個8}}\underbrace{999\cdots9}_{\text{70個9}}\cdots$

同理，「70 個連續的 9」後面緊接「707 個 1」、「707 個 2」、「707 個 3」、…、「707 個 9」、…。我們了解 a 的「長相」之後，就可以用「反證法」來證明 a 是一個無理數。

證明：由定義知 a 是一個無限小數。

假設 a 是一個有理數，其小數的形式是循環小數，令

$$a=0.a_1a_2\cdots a_n\overbrace{a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+m}}^{\text{循環節}}$$

循環節有 m 個數字，其中 m 是一個 k 位數，即 $10^{k-1}\le m<10^k$。我們要找出「a 的小數中，存在無限多串"相鄰數字為 1 且個數都超過 m"」這個事實。

1° 取自然數 n 滿足 $10^{k+1}<n\sqrt{2}<2\times10^{k+1}$，此種 n 會使 $a_n=1$。因 n 的範圍為 $\left[\frac{10^{k+1}}{\sqrt{2}}\right]+1\le n\le 2\times\left[\frac{10^{k+1}}{\sqrt{2}}\right]$，其個數計有 $l_k=2\times\left[\frac{10^{k+1}}{\sqrt{2}}\right]-\left[\frac{10^{k+1}}{\sqrt{2}}\right]=\left[\frac{10^{k+1}}{\sqrt{2}}\right]=10^k\left[5\sqrt{2}\right]$ 個。由於 $l_k=10^k\left[5\sqrt{2}\right]$ 是 k+1 位數，故 $l_k>m$，即「a 的小數中，存在 l_k 個相鄰數字皆為 1（$l_k>m$）」

2° 同理，取自然數 n 滿足 $10^{k+2}<n\sqrt{2}<2\times10^{k+2}$，此種 n 會使 $a_n=1$。此種 n 的個數計有 $l_k=10^{k+1}\left[5\sqrt{2}\right]$ 個，l_{k+1} 是 k+2 位數，故 $l_{k+1}>m$，即「a 的小數中，存在 l_{k+1} 個相鄰數字皆為 1（$l_{k+1}>m$）」。

3° 因此得出無限數列：l_k、l_{k+1}、l_{k+2}、…，其中 $l_n=10^n\left[5\sqrt{2}\right]$ 為 n 位數（$n\ge k$），使得在 a 的小數中，存在 l_k 個相鄰數字皆為 1、存在 l_{k+1} 個相鄰數字皆為 1、存在 l_{k+2} 個相鄰數字皆為 1、…。

故 a 是一個無理數。

<評分標準>

1° 說明至 $a=0.\underbrace{1245789}_{7個數}\cdots$，得 1/7 分。

2° 說明至 $a=0.\underbrace{1245789}_{7個數}\underbrace{111\cdots1}_{7個1}\underbrace{222\cdots2}_{7個2}\underbrace{333\cdots3}_{7個3}\cdots\underbrace{888\cdots8}_{7個8}\underbrace{999\cdots9}_{7個9}\cdots$，得 2/7 分。

3° 說明至

$a=0.\underbrace{1245789}_{7個數}\underbrace{111\cdots1}_{7個1}\underbrace{222\cdots2}_{7個2}\underbrace{333\cdots3}_{7個3}\cdots\underbrace{888\cdots8}_{7個8}\underbrace{999\cdots9}_{7個9}\underbrace{111\cdots1}_{70個1}\underbrace{222\cdots2}_{70個2}\underbrace{333\cdots3}_{70個3}\cdots\underbrace{888\cdots8}_{70個8}\underbrace{999\cdots9}_{70個9}\cdots$

，得 4/7 分。

4. 能否將一個角柱體分割成若干個角錐體，使得每個角錐體的底面都是角柱體的底面的一部份，且角錐體的頂點也都是角柱體的頂點？ (六分)

<參考解法>

令角柱體之底面積為 a，高為 h，故其體積為 ah。若它可以完全分割成 n 個底面積為 a_1、a_2、…、a_n 的角錐體，使得每個角錐體的底面都是由角柱體上底或下底的一部份，且角錐的頂點也是角柱的頂點，則角錐體的體積總和為

$\frac{1}{3}a_1h+\frac{1}{3}a_2h+\cdots+\frac{1}{3}a_nh=\frac{1}{3}h(a_1+a_2+\cdots+a_n)\leqq\frac{1}{3}h(2a)=\frac{2}{3}ah\neq ah$ ，矛盾，故不可能。

<評分標準>

1° 說明 n 個小角錐的體積＜原角柱體的體積，4/7 分

2° 證出 n 個小角錐的體積 $=\frac{1}{3}a_1h+\frac{1}{3}a_2h+\cdots+\frac{1}{3}a_nh=\frac{1}{3}h(a_1+a_2+\cdots+a_n)\leqq$

$\frac{1}{3}h(2a)=\frac{2}{3}ah\neq ah=$ 原角柱體的體積，3/7 分

5. 令 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\frac{a_n}{b_n}$ ，其中 a_n 與 b_n 爲互質的正整數。試證：對於無窮多個 n 值，不等式 $b_{n+1}<b_n$ 成立。 (七分)

<參考解法>

考慮 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2\cdot3^m}=\frac{a_{2\cdot3^m}}{b_{2\cdot3^m}}$ ……（1）

與 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2\cdot3^m-1}=\frac{a_{2\cdot3^m-1}}{b_{2\cdot3^m-1}}$ ……（2）

其中 $a_{2\cdot3^m}$ 與 $b_{2\cdot3^m}$ 互質，$a_{2\cdot3^m-1}$ 與 $b_{2\cdot3^m-1}$ 互質。

因 $\frac{1}{3^m}+\frac{1}{2\cdot3^m}=\frac{3}{2\cdot3^m}=\frac{1}{2\cdot3^{m-1}}$ ，所以（1）式可改寫成：

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2\cdot3^m}$

$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^m-1}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{3^m+1}+\cdots+\frac{1}{2\cdot3^m}$

$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^m-1}+\frac{1}{3^m+1}+\cdots+\frac{1}{2\cdot3^m-1}+\left(\frac{1}{2\cdot3^m}+\frac{1}{3^m}\right)$

$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^m-1}+\frac{1}{3^m+1}+\cdots+\frac{1}{2\cdot3^m-1}+\frac{1}{2\cdot3^{m-1}}$ ……（3）

比較（2）式與（3）式，$3^m\mid b_{2\cdot3^m-1}$ 但 $3^m\nmid b_{2\cdot3^m}$ ，且（2）中 $b_{2\cdot3^m-1}$ 除了 3 以外的質數的次方都不

比 $b_{2\cdot 3^m}$ 低，故 $b_{2\cdot 3^m-1} > b_{2\cdot 3^m}$ 。因 m 可以為任意正整數，故有無限多個 m 值使命題成立。

<評分標準>

1. 舉出正確的一些實例，2/7。
2. 發現 $3^m \mid b_{2\cdot 3^m-1}$ 但 $3^m \nmid b_{2\cdot 3^m}$ ，2/7。
3. 得到 $b_{2\cdot 3^m-1}$ 除了 3 以外的質數的次方都不比 $b_{2\cdot 3^m}$ 低，故 $b_{2\cdot 3^m-1} > b_{2\cdot 3^m}$ 推出結論，3/7。

6. 一疊 52 張的撲克牌，若黑桃 A 在這疊牌的最上方且任何相鄰的二張牌其點數或是花色相同（這疊牌最上方的牌和最下方的牌視爲相鄰），則稱這疊牌排列的順序爲「正常的順序」。已知將這疊牌排成「正常的順序」的方法數爲 n，試證：
   (a) n 可被 12！整除。(三分)
   (b) n 可被 13！整除。(五分)

<參考解法>

(a) 考慮 2、3、4、5、…、K 各數字第一次出現的順序，它有 12！種排列排成「正常的順序」的方法是它的倍數，故 n 可被 12！整除。

(b) 將 52 張牌圍成一圈，將 A、2、3、4、5、…、K 的數字重排後對換，共有 13！種不同的換法。然後由黑桃 A 開始依規定將牌收回。證明這 13！種排法完全不一樣。

如果其中有 a、b 兩種牌法完全一樣，則從黑桃 A 開始，對應的花色也都一樣，所以在 b 中，若 x 處是黑桃，a、b 的 y 處也是黑桃，因為黑桃只有 13 張，13 是質數，所以從 x、y、z、…，歷經 13 次後就會再回到 x 處。也就是 4k+1 張都是黑桃，同理可證，對於紅心、方塊和梅花也都是每 4 張循環一次，但這樣的排法不存在：黑桃 A→紅心 A→方塊 A→梅花 A→黑桃？所以 n 可被 13！整除。

<評分標準>

(a)1° 任何跟 2～K 排列有關的想法，1/7 分。
2° 直接看出 12！種不一樣，2/7 分
3° 直接說換數字：12×11×…×1＝12！，4/7 分。

(b)1° 考慮（A234…JQK），指出這個變換可以將一個排法做出 13 個排法，4/7 分。
2° 證明上述 13 種排法互不相同，3/7 分。
3° 考慮 13！互換但未說明，2/7 分。
4° 若證 A、2、3～K 有 13！種變換而直接說 13！整除 n，1/7 分。

7. 正整數 x_1 、 x_2 、…、 x_k 滿足以下不等式：

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2 < \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{2} \ ;$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k < \frac{x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_k^3}{2} \ 。$$

   (a) 試證 k>50； (三分)
   (b) 給定 k，試給符合條件的 x_i 值的例子。(三分)
   (c) 試求存在有例子可以滿足條件的最小 k 值。(三分)

<參考解法>

(a) 已知 $2x_1^2 + 2x_2^2 + \cdots + 2x_k^2 < x_1 + x_2 + \cdots + x_k < \frac{x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_k^3}{2}$ 。

若 x_1、x_2、…、x_k 皆小於或等於 4，則有 $\frac{x_i^3}{2} \le 2x_i^2$ ，$1 \le i \le k$ 。

因此 $\frac{x_1^3+x_2^3+\cdots+x_k^3}{2} \le 2x_1^2+2x_2^2+\cdots+2x_k^2$，矛盾。故 x_1、x_2、…、x_k 中至少有一數大於 4。

令 $x_1 > 4$。

由 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_k^2 < \frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{2}$ 可知

$$\frac{x_2+x_3+\cdots+x_k}{2} - x_2^2 - x_3^2 - \cdots - x_k^2 > x_1^2 - \frac{x_1}{2} > 16-2 = 14 \text{。}$$

考慮多項式 $\frac{t}{2}-t^2 = -(t-\frac{1}{4})^2+\frac{1}{16}$ 在 $t=\frac{1}{4}$ 時有最大值 $\frac{1}{16}$，故可知 $\frac{x_i}{2}-x_i^2 \le \frac{1}{16}$，$1 \le i \le k$。

因此有 $14 < \frac{x_2+x_3+\cdots+x_k}{2} - x_2^2 - x_3^2 - \cdots - x_k^2 \le \frac{k-1}{16}$。

可得 $k \ge 225 > 50$。

(b) 當 k=962 時，令 x_1=8，x_2=x_3=…=$x_{962} = \frac{1}{4}$，則有

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{962}^2 = 124\frac{1}{16} < 124\frac{1}{8} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_{962}}{2}$$

$$x_1+x_2+\cdots+x_{962} = 248\frac{1}{4} < 263\frac{65}{128} = \frac{x_1^3+x_2^3+\cdots+x_{962}^3}{2}$$

(c) 我們先證以下 2 個引理：

引理 1：設 $a, b, c \in R^+ \cup \{0\}$，它們不全相等且至多一個爲 0，設非負實數 x, y, z，$x \le y \le z$ 滿足

$$x+y+z = a+b+c,$$
$$x^2+y^2+z^2 = a^2+b^2+c^2,$$

證明，存在非負實數 x_1, x_2，$x_1 < x_2$ 使得 $x \in [x_1, x_2]$ 且滿足：

(*i*) 若 $x = x_1$，則 $0 = x < y \le z$ 或 $0 < x < y = z$；

(*ii*) 若 $x \in (x_1, x_2)$，則 $x < y < z$；

(*iii*) 若 $x = x_2$，則 $x = y < z$。

引理 1 的證明：

令 $F_1(x) = 2(\frac{a+b+c-x}{2})^2 + x^2 - a^2 - b^2 - c^2$, $F_2(x) = (a+b+c-2x)^2 + 2x^2 - a^2 - b^2 - c^2$，其中 $x \in [0, \frac{a+b+c}{3}]$。此時 $F_1'(x) = 3x-(a+b+c)$。

$\because 0 \le x \le \frac{a+b+c}{3}$，

$\therefore F_1'(x) \le 0$。

同理 $F_2'(x) = 4[3x-(a+b+c)]$。

$\therefore F_1(x), F_2(x)$ 在 $[0, \frac{a+b+c}{3}]$ 上遞減。

注意到 $F_2(0) = (a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2 > 0$, $F_2(\frac{a+b+c}{3}) = 3(\frac{a+b+c}{3})^2 - a^2 - b^2 - c^2 < 0$ (因爲 a, b, c 不全相等，故不等於 0)。

$\therefore F_2(x) = 0$ 在 $(0, \frac{a+b+c}{3})$ 上有解。又因爲 $F_2(x)$ 遞減，故此解唯一。我們取這個解爲 x_2，則 $F(x_2) = 0$。

又 $F_1(\frac{a+b+c}{3}) = 3(\frac{a+b+c}{3})^2 - a^2 - b^2 - c^2 < 0$, $F_1(0) = 2(\frac{a+b+c}{2})^2 - a^2 - b^2 - c^2$。

若 $F_1(0) > 0$，則取 x_1 爲 $F_1(x) = 0$ 的解，同上可知這個解唯一；若 $F_1(0) \le 0$，則取 $x_1 = 0$。

我們證明上述 x_1, x_2 滿足條件。

現設 $G(y,z)=y^2+z^2\ (y<z)$，我們證明：

$$G(y,z)>G(y+t,z-t)\ (0<t<\frac{z-y}{2})\Leftrightarrow z^2-(z-t)^2>(y+t)^2-y^2$$

又 $Q(k)=(k+t)^2-k^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上嚴格增，故由 $z-t>y$ 知上式成立．

$\therefore G(y,z)>G(y+t,z-t)$．

$\therefore G(y,z)$ 在 $(x,a+b+c-x)$ 時取最大值，在 $(\frac{a+b+c-x}{2},\frac{a+b+c-x}{2})$ 時取最小值．

$\therefore$ 當 $x=x_2$ 時，$x^2+y^2+z^2\leq 2x_2^2+(a+b+c-2x_2)^2=a^2+b^2+c^2$ 當且僅當 $y=x_2, z=(a+b+c-2x_2)$ 時等號成立，即 $x=x_2$ 時 $x=y<z$ 滿足 (iii)；

當 $x=x_1$ 時，

若 $x_1=0$，則 (i) 顯然成立；

若 $x_1\neq 0$，則當 $x=x_1$ 時

$$x^2+y^2+z^2\geq x^2+(\frac{y+z}{2})^2+(\frac{y+z}{2})^2=x_1^2+2(\frac{a+b+c-x_1}{2})^2=a^2+b^2+c^2,$$

等號成立當且僅當 $(y,z)=(\frac{y+z}{2},\frac{y+z}{2})$．

$\therefore$ 此時 $0<x_1<y=z$，滿足 (ii)．

我們再證 $x_2>x_1$，當 $x_1=0$ 時顯然成立；

當 $x_1\neq 0$ 時，若 $x_1\geq x_2$，由 $F_1(x)$ 在 $(0,\frac{a+b+c}{3}]$ 上遞減知 $F_1(x_2)\geq F_1(x_1)$．

又由 $G(y,z)>G(y+t,z-t)$ 知 $F_2(x_2)>F_1(x_2)$．故 $F_2(x_2)>F_1(x_1)=a^2+b^2+c^2$，矛盾！

$\therefore$ 必有 $x_1<x_2$．

接下來我們證明，若 $x\leq y\leq z$ 滿足 $x+y+z=a+b+c, x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2$，則必有 $x_1\leq x\leq x_2$．

當 $x_1=0$ 時，左邊顯然成立，現考慮 $x_1\neq 0$ 的情況．

若存在 x_0，使得 $\frac{a+b+c}{3}>x_0>x_2$，且有 $x_0+y+z=a+b+c, x_0^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2$．

則由 $F_2(x)$ 在 $(0,\frac{a+b+c}{3})$ 上遞減知 $F_2(x_0)<F_2(x_2)=a^2+b^2+c^2$．

又由 $G(y,z)>G(y+t,z-t)$ 知 $x_0^2+y^2+z^2\leq x_0^2+x_0^2+(a+b+c-2x_0)^2=F_2(x_0)$．

此時 $x_0^2+y^2+z^2\leq F_2(x_0)<a^2+b^2+c^2$，矛盾！

同理可知，若 $0<x_0<x_1$，則必有 $x_0^2+y^2+z^2\geq F_1(x_0)>a^2+b^2+c^2$，矛盾！

$\therefore x\in[x_1,x_2]$．

最後，我們證明這樣的 x_1, x_2 滿足 (ii)．

$\because$ 對 $x_1<x<x_2$，$F_1(x)<F_1(x_1)=a^2+b^2+c^2, F_2(x)>F_2(x_2)=a^2+b^2+c^2$．

$\therefore$ 此時 $x\neq y, y\neq z$，故 $x<y<z$，(ii) 成立．

綜上所述，這樣的 x_1, x_2 滿足條件，引理 1 得證．

引理 2：設非負實數 $a_1, a_2, \cdots, a_n\ (n\geq 3)$ 及 $0\leq x_1\leq x_2\leq \cdots\leq x_n$ 使得

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=a_1+a_2+\cdots+a_n,$$
$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2.$$

設 $F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3$．則 F_n 在 $0\leq x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}\leq x_n$ 時取最大值．

引理 2 的證明：首先，我們證明 $n=3$ 的情況．

$\because x\leq y\leq z$，且 $y+z=a+b+c-x, y^2+z^2=a^2+b^2+c^2-x^2$，

$\therefore$ 我們可用 x 表示 y, z，其中 $x\in[x_1,x_2]$．

設 $f(x)=x^3$，$g(x)=f'(x)=3x^2$，則 $g''(x)=6>0$．

$\therefore g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上嚴格凸．

令 $F(x)=f(x)+f(y(x))+f(z(x))$．我們證明 $F(x)$ 在 $x=x_2$ 時取最大值．

若成立，則由引理 1 知 $F(x)$在 $0<x=y<z$ 時取最大值．

爲證上述結論成立，設 $x\in(x_1,x_2)$，由引理 1 知 $x<y<z$．

由 $x+y(x)+z(x)=a+b+c, x^2+y(x)^2+z(x)^2=a^2+b^2+c^2$ 求導可知

$y'+z'=-1, yy'+zz'=-x$．

因此 $y'=\dfrac{x-z}{z-y}, z'=\dfrac{x-y}{y-z}$，且由 $F'(x)=f'(x)+y'f(y)+z'f(z)$得

$$\frac{F'(x)}{(x-y)(x-z)}=\frac{g(x)}{(x-y)(x-z)}+\frac{g(y)}{(y-z)(y-x)}+\frac{g(z)}{(z-x)(z-y)}\ .$$

因爲 g 是嚴格凸的，由琴生不等式知上式右邊大於 0．又 $(x-y)(x-z)>0$，

$\therefore F'(x)>0$．

故 $F(x)$在 $x\in(x_1,x_2)$上嚴格增．因此，$F(x)$在 $x=x_2$ 時取最大值．故 $n=3$ 時命題成立．

下面我們考慮 $n>3$ 的情況：

爲推出矛盾，設 F_n 在$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$時取最大值，其中 $b_1\le b_2\le\cdots\le b_n$ 且 $b_1<b_{n-1}$．

設 $x_1,x_{n-1},x_n\in R^+$ 且 $x_1+x_{n-1}+x_n=b_1+b_{n-1}+b_n, x_1^2+x_{n-1}^2+x_n^2=b_1^2+b_{n-1}^2+b_n^2$，由 $n=3$ 的情況知 $F_3(x_1,x_{n-1},x_n)=f(x_1)+f(x_{n-1})+f(x_n)$在 $x_1=x_{n-1}<x_n$ 時取最大值，這與 $b_1<b_{n-1}$ 矛盾！因此 F_n 在 $0<x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}$ 時取最大值，引理 2 得證．

由於原題關於 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 對稱，故不妨設 $0<x_1\le x_2\le\cdots\le x_k$．

由引理 2 知，當 $x_1+x_2+\cdots+x_k$ 取定，$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_k^2$ 取定，則 $x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3$ 在 $0\le x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}\le x_n$ 時取最大值．

設 $S=x_1+x_2+\cdots+x_k$，則若 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 滿足條件，則必有 $S=(k-1)x+y$，且

$$(k-1)x^2+y^2<\frac{(k-1)x+y}{2}\cdots①;$$

$$(k-1)x+y<\frac{(k-1)x^3+y^3}{2}\cdots②,\text{其中 } 0<x\le y.$$

此時注意到 $(k-1)x^3+y^3=[(k-1)x^2+y^2](x+y)-xy(k-1)x+y]$，代入②得

$$(xy+2)[(k-1)x+y]<[(k-1)x^2+y^2](x+y)\Rightarrow\frac{(k-1)x+y}{(k-1)x^2+y^2}<\frac{x+y}{2+xy}\ .$$

又由①知 $\dfrac{(k-1)x+y}{(k-1)x^2+y^2}>2$．

$$\therefore\frac{x+y}{2+xy}>2\Rightarrow x+y>4+2xy\Rightarrow 2x+2y>8+4xy\Rightarrow(1-2x)(2y-1)>7.$$

$\because x\le y$，

$\therefore$ 必有 $x<\dfrac{1}{2}<y$，

$$\therefore 1-2x>\frac{7}{2y-1}\Rightarrow x<\frac{y-4}{2y-1}\cdots③$$

又由①知 $2(k-1)x^2-(k-1)x+2y^2-y<0$．

設 $f(x)=2(k-1)x^2-(k-1)x+2y^2-y$，則 $f(x)=0$ 有兩相異實根．

$\because f(x)<0$，

$$\therefore\frac{(k-1)-\sqrt{(k-1)^2-8(k-1)(2y^2-y)}}{4(k-1)}<x,\text{此時 } k-1>8(2y^2-y).$$

結合③知 $\dfrac{(k-1)-\sqrt{(k-1)^2-8(k-1)(2y^2-y)}}{4(k-1)}<\dfrac{y-4}{2y-1}$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{4}-\frac{y-4}{2y-1}<\frac{\sqrt{(k-1)^2-8(k-1)(2y^2-y)}}{4(k-1)}$$

$\Leftrightarrow \frac{15-2y}{(2y-1)} < \frac{\sqrt{(k-1)^2-8(k-1)(2y^2-y)}}{k-1}$ ．

當 $y \geq \frac{15}{2}$ 時上式恒成立，此時 $k-1 > 8(2\cdot\frac{225}{4} - \frac{15}{2}) \Rightarrow k \geq 842$ ．

當 $y < \frac{15}{2}$ 時，$(\frac{15-2y}{2y-1})^2 < \frac{(k-1)-8(2y^2-y)}{k-1}$

$\Leftrightarrow \frac{8(2y^2-y)}{k-1} < 1 - \frac{(2y-15)^2}{(2y-1)^2} = \frac{(2y-1)^2-(2y-15)^2}{(2y-1)^2} = \frac{14\cdot(4y-16)}{(2y-1)^2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{k-1} < \frac{7(y-4)}{(2y-1)^2(2y^2-y)}$ ．

現求 $\frac{7(y-4)}{(2y-1)^2(2y^2-y)}$ 的最大值：設 $f(x) = \frac{7(x-4)}{(2x-1)^2(2x^2-x)}$ $(4 < x < \frac{15}{2})$，則

$$f'(x) = \frac{7\left[(2x-1)^2(2x^2-x)-(x-4)\left((2x-1)^3+6x(2x-1)^2\right)\right]}{(2x-1)^4(2x^2-x)^2}$$

$$= \frac{7(2x-1)^2\left[2x^2-x-(x-4)(8x-1)\right]}{(3x-1)^4(2x^2-x)^2} = \frac{-7(6x^2-32x+4)}{(2x-1)^2(2x^2-x)^2} = \frac{-14(3x^2-16x+2)}{(2x-1)^2(2x^2-x)^2}$$ ．

$\therefore x \in (-\infty, \frac{8-\sqrt{58}}{3}) \cup (\frac{8+\sqrt{58}}{3}, +\infty)$ 時，$f'(x) < 0$；$x \in [\frac{8-\sqrt{58}}{3}, \frac{8+\sqrt{58}}{3}]$ 時，$f'(x) > 0$ ．

$\therefore f(x)$ 在 $[4, \frac{8+\sqrt{58}}{3}]$ 上遞增，在 $[\frac{8+\sqrt{58}}{3}, \frac{15}{2})$ 上遞減．

$\therefore f(x)$ 在 $x = \frac{8+\sqrt{58}}{3}$ 時取最大值．

$\therefore k-1 > \frac{1}{f(\frac{8+\sqrt{58}}{3})} \approx 514.167$ ．

$\therefore k \geq 516$ ．

當 $k = 516$ 時，取 $y = \frac{8+\sqrt{58}}{3}$，$x = 0.12776$．此時，①式顯然成立．

代入②知，右邊－左邊 $\approx 0.052687606 > 0$ ．

$\therefore k_{min} = 516$ ．

<評分標準>

(a) 1° 指出存在 $x_i > 4$，得 2/7 分。

2° 列出 $\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \frac{1}{4}\right)^2 < h$ ，3/7 分

3° 列出 $\sum_{i=1}^{k} x_i - 2x_i^2 \geq 14$ ，1/7 分

(b) 一個（少數幾個）夠大，其他的適當小的想法，3/7 分。

(c) 1° 得到 $k > 200$，0.5/7 分

2° 得到最小 k 值 < 1000，0.5/7 分

3° 得到 $k > 300$，0.5/7 分

4° 得到最小 k 值 < 600，0.5/7 分

5° 注意到 $x_1 = x_2 = \cdots = x_l > x_{l+1} = \cdots = x_k$ ，1/7 分

6° 證出 5°，1/7 分

7° 注意 $l = 1$，1/7 分。

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間五小時。》