注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。**可直接下載而不須申請**。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

International Mathematics Tournament of Towns
環球城市數學競賽
2006 秋季賽　國中組　初級卷　2006/10/22

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 任意正整數 x、y，其中 $x \le y$，將 x 寫在黑板之左側，將 y 寫在黑板之右側。小王對黑板上的兩個數依序進行以下之操作：

   (1) 將 x^2 寫在筆記本上；

   (2) 將黑板左側的數替換成 x 與 $y-x$ 中較小（或相等）者，將黑板右側的數替換成 x 與 $y-x$ 中較大（或相等）者。

   小王繼續上述操作，直到黑板上出現一個數等於 0 為止。請問最後小王筆記本上所寫下的數的總和是多少？（四分）

參考解法 1：

由題意，筆記本上的數的總和為曾經出現在黑板左側的數的平方和，且可以觀察出若黑板左側的數為黑板左側的數字的兩倍或兩倍以上，則經過一次操作後黑板右側的數仍然不變。因 $x \le y$，可利用輾轉相除法得知

$$y = a_1 x + r_1 \text{，其中} 1 \le a_1 \text{，} 0 \le r_1 < x \text{，} a_1 \text{、} r_1 \in \mathbb{N} \text{；}$$
$$x = a_2 r_1 + r_2 \text{，其中} 1 \le a_2 \text{，} 0 \le r_2 < r_1 \text{，} a_2 \text{、} r_2 \in \mathbb{N} \text{；}$$
$$r_1 = a_3 r_2 + r_3 \text{，其中} 1 \le a_3 \text{，} 0 \le r_3 < r_2 \text{，} a_3 \text{、} r_3 \in \mathbb{N} \text{；}$$
$$\vdots$$
$$r_{n-2} = a_n r_{n-1} + r_n \text{，其中} 1 \le a_n \text{，} 0 \le r_n < r_{n-1} \text{，} a_n \text{、} r_n \in \mathbb{N} \text{；}$$
$$r_{n-1} = a_{n+1} r_n \text{，其中} 1 \le a_{n+1} \text{，} a_{n+1} \in \mathbb{N} \text{。}$$

因 $y = a_1 x + r_1 = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{a_1\text{個}} + r_1$，可知 x 被寫在黑板左側 a_1 次；

$x = a_2 r_1 + r_2 = \underbrace{r_1 + r_1 + \cdots + r_1}_{a_2\text{個}} + r_2$，可知 r_1 被寫在黑板左側 a_2 次；

$r_1 = a_3 r_2 + r_3 = \underbrace{r_2 + r_2 + \cdots + r_2}_{a_3\text{個}} + r_3$，可知 r_2 被寫在黑板左側 a_3 次；

$$\vdots$$

$r_{n-1} = a_{n+1} r_n = \underbrace{r_n + r_n + \cdots + r_n}_{a_{n+1}\text{個}}$。

所以筆記本上的數的總和為 $a_1 x^2 + a_2 r_1^2 + a_3 r_2^2 + \cdots + a_n r_{n-1}^2 + a_{n+1} r_n^2$：

$$\begin{aligned}
&a_1 x^2 + a_2 r_1^2 + a_3 r_2^2 + \cdots + a_n r_{n-1}^2 + a_{n+1} r_n^2 \\
&= a_1 x^2 + a_2 r_1^2 + a_3 r_2^2 + \cdots + (a_n r_{n-1}^2 + r_{n-1} r_n) \\
&= a_1 x^2 + a_2 r_1^2 + a_3 r_2^2 + \cdots + r_{n-1}(a_n r_{n-1} + r_n) \\
&= a_1 x^2 + a_2 r_1^2 + a_3 r_2^2 + \cdots + r_{n-1} r_{n-2} \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

$= a_1x^2 + a_2r_1^2 + r_1r_2$

$= a_1x^2 + r_1(a_2r_1 + r_2)$

$= a_1x^2 + r_1x$

$= x(a_1x + r_1)$

$= xy$

故筆記本上的數的總和為 xy。

參考解法 2：

小王筆記本上所寫的數的總和為原來所寫二數之乘積。我們可針對直到黑板上出現一個數等於 0 為止的操作次數作數學歸納法。

令 n 為黑板上出現一個數等於 0 為止的總操作次數。

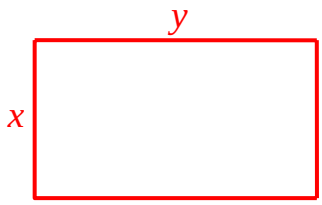
當 $n=1$ 時，此二數必須相等，小王筆記本上所寫的數也就是此二數之乘積。

假設 $n=k$ 時成立。

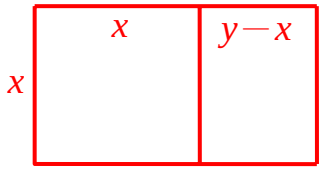
當 $n=k+1$ 時，假設黑板上原來所寫之二數為 x、y，且 $x \leqq y$，經由第一次操作，小王在筆記本上所寫下的數為 x^2，在黑板上的數換成 x 與 $y-x$。此時到操作完畢還需操作 k 次，而根據歸納假設，由此時到操作結束時筆記本上所寫的數的總和為 $x(y-x)$。因此小王筆記本上所寫的數的總和為 $x^2 + x(y-x) = xy$，得證。

參考解法 3：(根據新竹實驗中學江盛浩同學的解法)

每一次黑板上出現的兩個正整數 x、y，其中 $x \leq y$，可視為一個長方形的長與寬：



操作一次可看成是將該長方形剪去一塊以短邊為邊長的正方形：



而筆記本上的數值即為剪去正方形的面積。當黑板上出現數字為 0 時，即代表已經將原先的長方形剪完了，此時筆記本上的數值的總和就是原長方形的面積 xy。

<評分標準>

1. 有歸納動作，結果正確，給 2/7 分。
2. (i) 每次操作後，筆記本上的數之和與黑板上兩數之積的和恆為 xy，給 5/7 分。
   (ii)x、y 為有限正整數，由除法原理可知有限次後必結束，給 7/7 分。

2. 說謊者恒說謊話，誠實者恒說真話，奸詐者有時說謊話有時說真話。只允許您提出一些是非題，要求對方回答「是」或「否」(例如：此人是奸詐者嗎？)。

(a) 有三人站在您面前，已知其中一人爲說謊者，一人爲誠實者，另一人爲奸詐者。他們彼此都確知對方的身份，請問您該如何問才可以確認每一個人的身份？（一分）

(b) 有四人站在您面前，已知其中一人爲說謊者，一人爲誠實者，另二人爲奸詐者，他們彼此都確知對方的身份。試證：兩位奸詐者有辦法透過事先商議如何回答您的提問，使您無法確認每一個人的身份。(三分)

參考解法：

(a) 同時問三人「你是否為奸詐者？」，此時由條件可知誠實者與說謊者答案永遠相反，故至少都會有一個答案為「是」以及至少會有一個答案為「否」。若只有一個人回答「是」，因為誠實者必回答「否」，所以可確定此人必為說謊者，接著只要問說謊者有關其餘二人的身份，即可得知每一個人的身份；若只有一個人回答「否」，因為說謊者必回答「是」，所以可確定此人必為誠實者，接著只要問誠實者有關其餘二人的身份，即可得知每一個人的身份。

(b) 只要兩位奸詐者事先商議，第一位奸詐者裝扮成自己是誠實者，而把原來誠實者視為奸詐者；第二位奸詐者裝扮成自己是說謊者，而把原來說謊者視為奸詐者。即，當所問的問題不涉及裝扮者和被裝扮者時，奸詐者的回答都與被裝扮者的回答相同；當所問的問題涉及裝扮者和被裝扮者時，奸詐者的回答必須與被裝扮者的回答不相同。

由於角色互相混淆，如此便無法區分這四個人的身份。

<評分標準>

(a) (1) 問一個能確定是否之「好問題」：

你是奸詐者嗎？（誠：H，謊：L，奸：S）

H	L	S	
×	○	○	……（A）
×	○	×	……（B）

討論至此，2/7 分

(2) （A）時：確定誠實者 H，再問 H 另一人是否為奸詐者，回答○，該人即為 S，若回答×則該人即為 L。

得到此結論再給 2/7 分。

(3) （B）時：確定說謊者 L，再問 L 另一人是否為奸詐者，回答○，該人即為 H，若回答×則該人即為 S。

得到此結論再給 2/7 分。

以上討論全部完整，7/7 分。

(b) (1) 區隔出 A 組：H、S_1 及 B 組：L、S_2 兩組，當問及不關同組之問題，S_1 將自己想成 H，S_2 將自己想成 L。討論至此，得 4/7 分。

(2) 當問及彼此相關的問題，如 A 組 H、S_1，問你是 H 嗎？若 H、S_1 都回

答◯，則不合題意，故 S_1 必須將自己想成 H 之反向答案。討論至此，得 3/7 分。

3. (a) 在黑板上任意寫下 2007 個大於 1 的正整數。試證：您必定可以擦掉黑板上的某一個數，使得剩下的 2006 個數的乘積可表示爲 a^2-b^2，其中 a、b 爲正整數。（二分）

(b) 在黑板上有 2007 個大於 1 的正整數，其中一個數爲 2006，且已知這 2007 個數中恰好只能找到一個數，使得擦去這個數後剩下的 2006 個數的乘積可以表示爲 a^2-b^2，其中 a、b 爲正整數。試證：這個唯一的數是 2006。（二分）

參考解法：

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，因 $a-b$ 與 $a+b$ 同奇或同偶，故 a^2-b^2 為奇數或 4 的倍數。若一個數可寫成 $4n$ 的型態（即 4 的倍數），則有 $4n=(n+1)^2-(n-1)^2$；若一個數可寫成 $2n+1$ 的型態（即奇數），則有 $2n+1=(n+1)^2-n^2$。所以一個數能否表示成 a^2-b^2 的充分必要條件是這個數是否為奇數或 4 的倍數。

(a) 1. 若 2007 個數全為奇數，則任意擦去一個數後所剩的 2006 個數的乘積為奇數，故可表示為 a^2-b^2。

2. 若 2007 個數中只有一個偶數且此數不為 4 的倍數，則擦去這唯一的偶數後所剩的 2006 個數的乘積為奇數；若 2007 個數中只有一個偶數且此數為 4 的倍數，則任意擦去一個數後所剩的 2006 個數的乘積為奇數或 4 的倍數，故可表示為 a^2-b^2。

3. 若 2007 個數中只有兩個偶數，則任意擦去一個奇數後所剩的 2006 個數的乘積為 4 的倍數，故可表示為 a^2-b^2。

4. 若 2007 個數中有超過兩個偶數，則任意擦去一個數後所剩的 2006 個數的乘積仍為 4 的倍數，故可表示為 a^2-b^2。

(b) 由(a)可知，若恰好只能找到一個數，使得擦去這個數後剩下的 2006 個數的乘積可以表示為 a^2-b^2，則這 2007 個數中恰只有一個偶數且此數不為 4 的倍數，必須擦去這個偶數。因此這個唯一的數是 2006。

<評分標準>

(a) (1) 得出一個數能否表示成 a^2-b^2 的充分必要條件是這個數是否為奇數或 4 的倍數，給 3/7 分。
(2)正確討論 4n+2 型偶數一個、二個的情況，各給 3/7 分。
(b) (1) 得出 2006 是 4n+2 型的偶數，給 2/7 分。
(2) 會運用(a)的結果進行推論，再給 5/7 分。

4. 在三角形 ABC 中，延長射線 CB 至點 B'，使得 $BB'=AB$。設 $\angle B$ 及 $\angle C$ 的外角平分線交於點 M，試證：點 A、B'、M 及 C 四點共圓。（四分）

參考解法：

$\because$ $BB' = AB$ ； $BM=BM$

$\angle B'BM = \angle ABM$

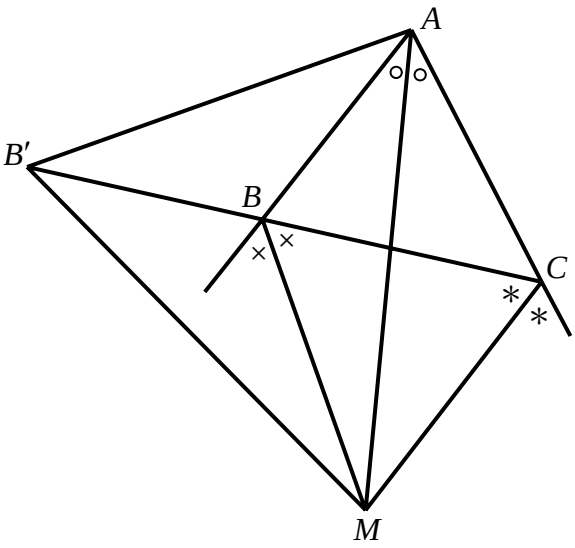
$\therefore$ $\triangle B'BM \cong \triangle ABM$ (SAS)

$\therefore$ $\angle CB'M = \angle BAM$ (對應角)

點 M 爲旁心故 $\angle BAM = \angle CAM$

$\therefore \angle CAM = \angle BAM = \angle CB'M$

故點 A、B'、M 及 C 四點共圓。



<評分標準>

1 說明 M 為旁心，AM 平分 $\angle CAB$，3/7。

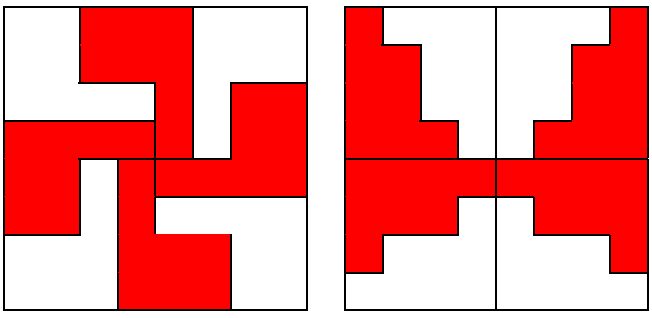
2 證明 $\triangle ABM \cong \triangle BB'M$，3/7。

3 說明 A、B'、M、C 共圓，1/7。

5. 將一個正方形切割爲 n 個全等的非凸多邊形，使得這些多邊形的每一個邊都平行於正方形的邊，且任兩個多邊形都無法經由平移與另一個多邊形重合。請問可能的 n 值最大者爲何？（註：連接多邊形內任意二點之線段，若仍全部落在多邊形之內部，則稱此多邊形爲凸多邊形。）（四分）

參考解法：

因正方形有 4 條對稱軸，故每一個邊都與正方形的邊平行的多邊形最多只能有 8 個定向，即全等之非凸多邊形最多只能有 8 個，否則就會有兩個多邊形可經由平移與另一個多邊形重合。右圖是兩組 8 個非凸多邊形的例子：



<評分標準>

1° 做出 4 個正確之圖，1/7 分

2° 做出 8 個正確之圖，3/7 分

說明最多 8 個，2/7 分

證明最多 8 個，2/7 分