注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。**可直接下載而不須申請**。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

International Mathematics Tournament of Towns
環球城市數學競賽
2006 秋季賽　國中組　高級卷　29/10/2006

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 有一個正七邊形與一個正十七邊形，分別畫出它們的內切圓與外接圓。已知它們的環狀部分面積都相等，試證這個正七邊形的邊長與正十七邊形的邊長相等。(三分)

<參考解法>

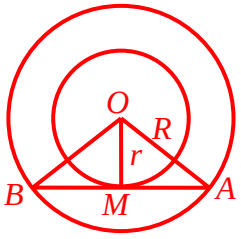
正多邊形的內切圓與外接圓的圓心 O 重合。

1　如圖，AB 為正七邊形的一邊，則有：

$$\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = R^2 - r^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

內切圓與外接圓所圍之環圈面積為：

$$S = (R^2 - r^2)\pi \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$



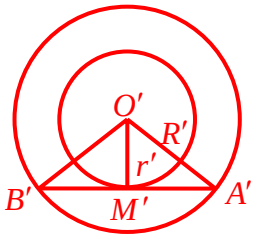
正七邊形的一邊 AB

2　同理，$A'B'$ 為正十七邊形的一邊，則有：

$$\left(\frac{A'B'}{2}\right)^2 = R'^2 - r'^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

內切圓與外接圓所圍之環圈面積為：

$$S' = (R'^2 - r'^2)\pi \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$



正十七邊形的一邊 $A'B'$

3　由題意可知 $S = S'$，故得

$$R^2 - r^2 = R'^2 - r'^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

由此可推導出　$\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \left(\frac{A'B'}{2}\right)^2$

故　$AB = A'B'$

<評分標準>

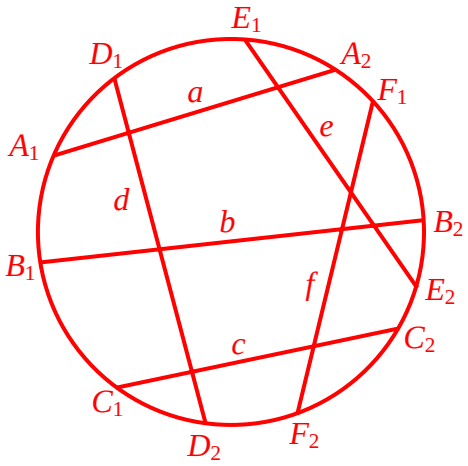
1. 推出(1)式，2/7。
2. 推出(2)式，2/7。
3. 得到(5)式並推導出結論，3/7。

2. 每當小金遇到一個人，他都試圖瞭解誰與誰彼此之間互相認識。爲了記錄這些關係，他畫了一個圓，每個人用一條弦代表，並且使二個互相認識的人所代表的弦相交（可能相交於端點），若二人互不認識則其所代表的弦互不相交。小金認爲對於任何公司裡的人員，他都可以用這項的方式做紀錄。請問小金的想法正確嗎？(五分)

<參考解法>

小金說法不正確。令 a、b、c 互不相識，d 與 a、b、c 都相識。不失一般性，可用下圖表示：

當 e 只與 a、b 認識，f 只與 b、c 認識，g 只與 a、c 認識，則 e、f、g 至少有一個無法用此方式做記錄。



證明：

假設 e 只與 a、b 認識，f 只與 b、c 認識。

若令弦 e 的兩個端點分別為 E_1、E_2，因 e 與 a、b 認識，不失一般性地可令 E_1 與 A_1A_2 在 b 之同側，則 E_2 與 A_1A_2 在 b 之異側。

令弦 f 的兩個端點分別為 F_1、F_2，因 f 與 b、c 認識，不失一般性地可令 F_2 與 C_1C_2 在 b 之同側，則 F_1 與 C_1C_2 在 b 之異側。

令弦 g 的兩個端點分別為 G_1、G_2，因 g 與 a、c 認識，不失一般性地可令 G_1 與 A_1A_2 在 c 之同側，即 G_1 與 A_1A_2 在 b 之同側，而 G_2 與 A_1A_2 在 c 之異側，即 G_1 與 A_1A_2 在 b 之異側。

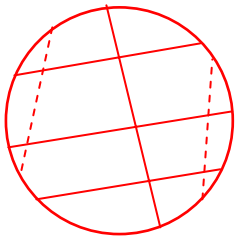
此時 g 與 b 相交，即 g 與 b 也認識，與 g 只認識 a、c 矛盾，故小金說法不正確。

<評分標準>

Type Ⅰ

1° 先讓一人與互不相識的三人相識（需證明僅一種畫法）

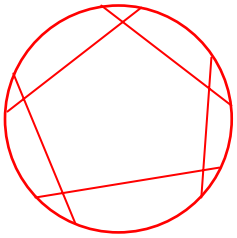
2° 再讓互不相識的三人，其中兩人只與另外的人相識，則此種情形無法畫出。



Type Ⅱ

1° ABCDE 五人只與相鄰的人認識（A 與 E、B 識，E 與 D、A 識）

2° 第六人若與 A、B、C、D、E 均認識也無法畫出。



舉出例子得 3/7 分。

但若要得 7/7 分，需討論完整可能之畫法，說明在各種畫法下無法完成。

3. 在 3×3 的方格表中，第一列的小方格內分別填入 a、b 與 c 三個數，第二列的小方格內分別填入 d、e 與 f 三個數，第三列的小方格內分別填入 g、h 與 i 三個數。已知這個方格表構成一個「幻方」－它的每行、每列及兩條對角線上的數字和都相等，試證：

(a) $2(a+c+g+i)=b+d+f+h+4e$ ；(三分)

(b) $2(a^3+c^3+g^3+i^3)=b^3+d^3+f^3+h^3+4e^3$ 。(三分)

<參考解法 1>

三階幻方如右圖。設每一行、每一列、每一對角線上三數之和皆為 $3M$（$3M$ 稱為「魔數」）。如此得出：

a	b	c
d	e	f
g	h	i

$$a+e+i=3M \quad \cdots\cdots \quad (1)$$
$$b+e+h=3M \quad \cdots\cdots \quad (2)$$
$$c+e+g=3M \quad \cdots\cdots \quad (3)$$
$$d+e+f=3M \quad \cdots\cdots \quad (4)$$

(1)＋(2)＋(3)+(4)得出：

$$(a+b+c+d+e+f+g+h+i)+3e=12M$$
$$\Rightarrow \quad 9M+3e=12M$$
$$e=M \quad \cdots\cdots \quad (5)$$

由此可得：$a+i=b+h=c+g=d+f=2M$ …… (6)

(a) $2(a+c+g+i)=2[(a+c)+(g+i)]=2(2M+2M)=8M$

$b+d+f+h+4e=(b+d)+(f+h)+4M=2M+2M+4M=8M$

故 $2(a+c+g+i)=b+d+f+h+4e$

(b) $a^3+i^3=(a+i)^3-3ai(a+i)\underset{(6)式}{=}8M^3-6M(ai)$

$c^3+g^3=(c+g)^3-3cg(c+g)\underset{(6)式}{=}8M^3-6M(cg)$

$b^3+h^3=(b+h)^3-3bh(b+h)\underset{(6)式}{=}8M^3-6M(bh)$

$d^3+f^3=(d+f)^3-3df(d+f)\underset{(6)式}{=}8M^3-6M(df)$

$\Rightarrow$ $2(a^3+c^3+g^3+i^3)=32M^3-12M(ai+cg)$ ……（A）

$b^3+d^3+f^3+h^3+4e^3=20M^3-6M(bh+df)$ ……（B）

將（B）式中的 $bh+df$ 化成「a、i、c、g」的式子來表示：

∵ $b=3M-(a+c)$ ；$h=3M-(g+i)$

$d=3M-(a+g)$ ；$f=3M-(c+i)$

∴ $bh+df$

$=[9M^2-3M(a+c+g+i)+(a+c)(g+i)]+[9M^2-3M(a+g+c+i)+(a+g)(c+i)]$

$=[9M^2-3M(2M+2M)+(ag+ai+cg+ci)]+[9M^2-3M(2M+2M)+(ac+ai+cg+gi)]$

$=(-6M^2)+a(g+c)+2(ai+cg)+i(g+c)$

$=(-6M^2)+(a+i)(g+i)+2(ai+cg)$

$=(-6M^2)+(2M)(2M)+2(ai+cg)$

$=(-2M^2)+2(ai+cg)$

代回（B）式得出：

$b^3+d^3+f^3+h^3+4e^3=20M^3-6M(-2M^2+2(ai+cg))=32M^3-12M(ai+cg)$

與（A）式比較即有：$2(a^3+c^3+g^3+i^3)=b^3+d^3+f^3+h^3+4e^3$

<參考解法 2>

三階幻方如右圖。

a	b	c
d	e	f
g	h	i

(a) 令 $K=a+b+c=d+e+f=g+h+i=a+d+g$

$=b+e+h=c+f+i=a+e+i=c+e+g$

由 $a+d+g=d+e+f$ 可知 $a+g=e+f$ ……(1)

由 $c+f+i=d+e+f$ 可知 $c+i=d+e$ ……(2)

由 $a+b+c=b+e+h$ 可知 $a+c=e+h$ ……(3)

由 $g+h+i=b+e+h$ 可知 $g+i=b+e$ ……(4)

(1)+(2)+(3)+(4)可得：

$2(a+c+g+i)=b+d+f+h+4e$

(b) 由 $a+e+i=b+e+h=c+e+g=d+e+f$

可知 $a+i=b+h=c+g=d+f$。

由(a)可得 $4(b+h)=2(b+h)+4e \Rightarrow b+h=2e \Rightarrow K=b+h+e=3e \Rightarrow e=\frac{K}{3}$。

$e+s$	$e-t-s$	$e+t$
$e+t-s$	e	$e-t+s$
$e-t$	$e+t+s$	$e-s$

同理 $d+f=a+i=g+c=2e$。

令 $a=e+s$，$i=e-s$，$c=e+t$，$g=e-t$，其中 s、t 為整數。

則 $b=e-t-s$，$h=e+t+s$，$f=e-t+s$，$d=e+t-s$。

$$2(a^3+c^3+g^3+i^3)$$
$$=2[(e+s)^3+(e+t)^3+(e-t)^3+(e-s)i^3]$$
$$=2(2e^3+6es^2+2e^3+6et^2)$$
$$=8e^3+12e(s^2+t^2)$$
$$b^3+d^3+f^3+h^3+4e^3$$
$$=[e-(t+s)]^3+[e+(t-s)]^3+[e-(t-s)]^3+[e+(t+s)]^3+4e^3$$
$$=2e^3+6e(t+s)^2+2e^3+6e(t-s)^2+4e^3$$
$$=8e^3+6e(t^2+2ts+s^2+t^2-2ts+s^2)$$
$$=8e^3+12e(t^2+s^2)$$

故 $2(a^3+c^3+g^3+i^3)=b^3+d^3+f^3+h^3+4e^3$。

<評分標準>

(a) 1　得 $a+g=e+f$、$c+i=d+e$、$a+c=e+h$、$g+i=b+e$ 的關係，得 2/7 分。

2　通過一些式子的組合就直接得到結論，得 7/7 分。

3　由結論出發，得到等式的條件或恆等式，得 2/7 分。

以上三項評分標準各自獨立。

(b) 1　有 $a+i=g+c=2e$ 的結論再推導 $a^3+c^3=(a+c)^3-3(a+c)ac=(h+e)^3-3(a+c)ac$ 的關係但沒有結論，得 2/7 分。

2　若由 1°得下列假設：令 $a=e+x$、$i=e-x$、$c=e+y$、$g=e-y$、$b=e-x-y$、…，但最後結論沒得到，給 2/7 分。

4. 半徑爲 R 的圓內切於一個銳角三角形。已知圓上有三條切線將此三角形分割出三個直角三角形及一個周長爲 Q 的六邊形，請問這三個直角三角形的內切圓直徑之和是多少？(六分)

<參考解法 1：幾何證法>

1°　如圖所示，易知半徑為 R 的圓的外切六邊形 $DEFGHK$ 的周長為 $Q=2(DE+FG+HK)$。

2°　對△ADE 而言，其內切圓半徑為 r_1，易知

$$2r_1=2z=AE+DE-AD$$

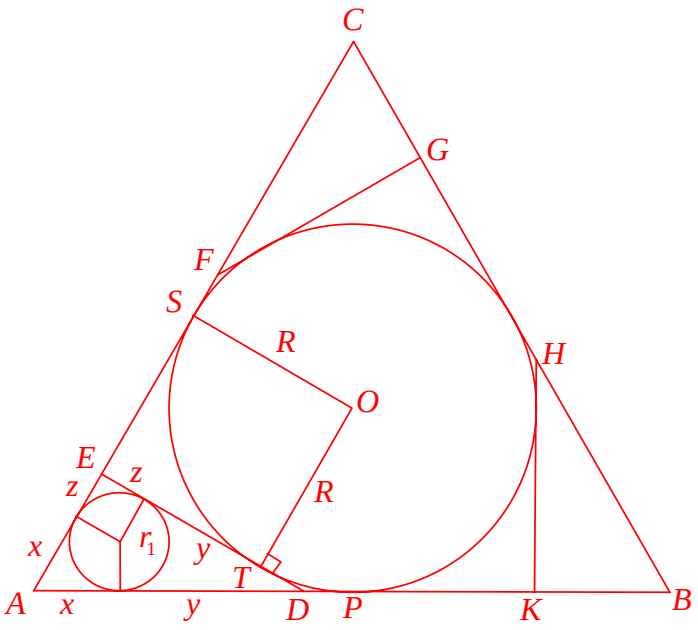
$AP=AD+DP=AD+DT$ 且 $AS=AE+ES=AE+R$。由 $AP=AS$ 得 $AE-AD=DT-R$，

又 $DE=ET+DT=R+DT$，因此

$$2r_1=2DT=2(DE-R)。$$

同理得△BHK、△CFG 的內切圓半徑 r_2、r_3 滿足 $2r_2=2(HK-R)$、$2r_3=2(FG-R)$。

由 1°、2°得三直角三角形的內切圓直徑和為 $Q-6R$。



<參考解法 2：解析證法>

$\alpha = 45° + \frac{A}{2}$

可推得 $DE = (1 + \frac{\cos A}{1+\sin A})R$

可得六邊形周長 $Q = 2(3 + \frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{\cos B}{1+\sin B} + \frac{\cos C}{1+\sin C})R$

$DT = (1 + \frac{\cos A}{1+\sin A})R$，$ET = R$，$DE = \frac{1+\sin A+\cos A}{1+\sin A}R$

$AE = DE\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}DE$，$AD = \frac{1}{\sin A}DE$

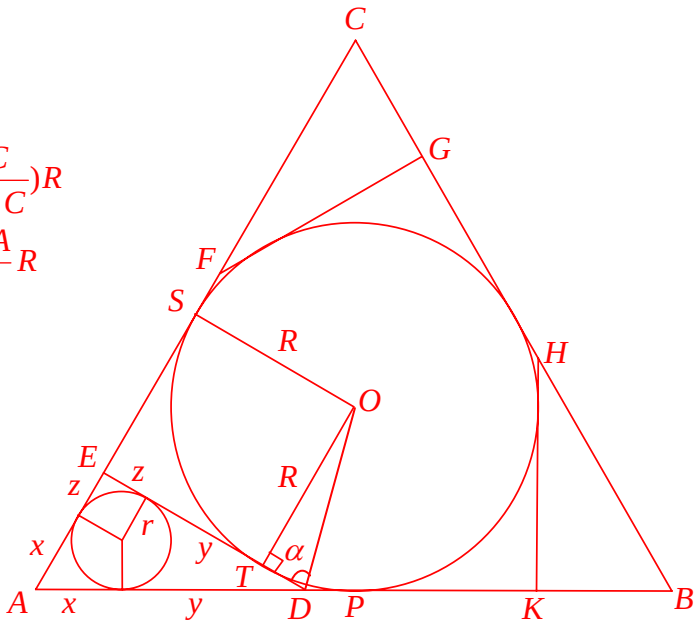
$P = AE + AD + DE$

$= (\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{1}{\sin A} + 1)DE = \frac{1+\sin A+\cos A}{\sin A}DE$

令△ADE 的內切圓半徑為 r，則有 $rP = AE \times DE$，

得 $r = \frac{\cos A}{1+\sin A}R$。同理，可推得三直角三角形

的內切圓直徑和為 $2(\frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{\cos B}{1+\sin B} + \frac{\cos C}{1+\sin C})R = Q - 6R$。



<評分標準>

<參考解法 1：幾何證法>

(1) 得到 $DEFGHK$ 的周長為 $Q = 2(DE+FG+HK)$，給 2/7 分。

(2) 得到 $2r_1 = 2z = AE + DE - AD$，再給 2/7 分。

(3) 得到 $2r_1 = 2DT = 2(DE - R)$ 並推導出結論，3/7。

<參考解法 2：解析證法>

正確算出結論給 7/7 分，否則 0 分。

5. 有一張 1×1 的相片（厚度不計），如果一張面積爲 2 的矩形包裝紙可以經過折疊但不可以剪開而完全覆蓋住此相片的正反面，則稱此包裝紙爲「合身的包裝紙」。（例如：2×1 的矩形包裝紙和邊長爲 $\sqrt{2}$ 的正方形包裝紙都是合身的包裝紙。）

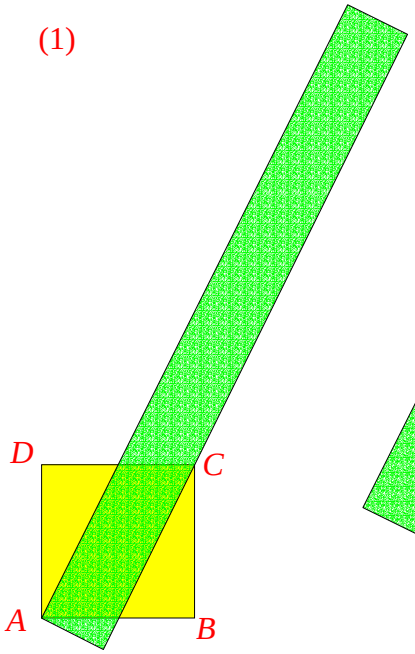
(a) 試證還有其它的「合身的包裝紙」。(四分)

(b) 試證有無限多個尺寸不同的「合身的包裝紙」。(三分)

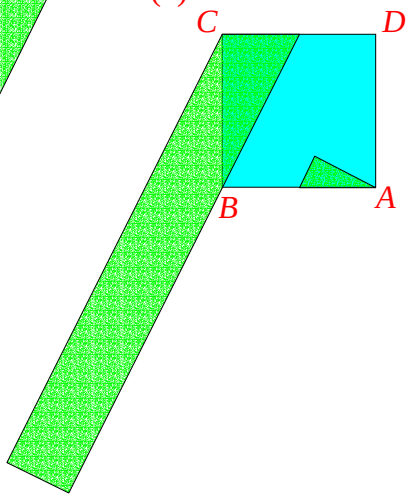
<參考解法>

(a) 令包裝紙為 $\frac{1}{\sqrt{5}} \times 2\sqrt{5}$ 的矩形，則依如圖所示的步驟可將 1×1 相片正反兩面完全覆蓋，是「合身的包裝紙」。

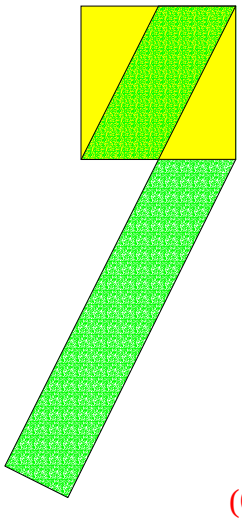
(1)



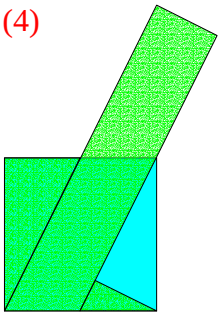
(2)



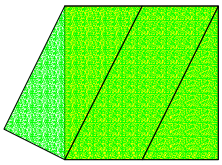
(3)



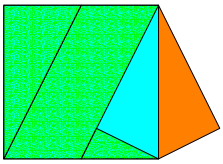
(4)



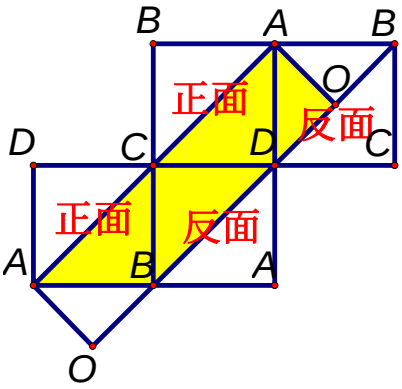
(5)



(6)

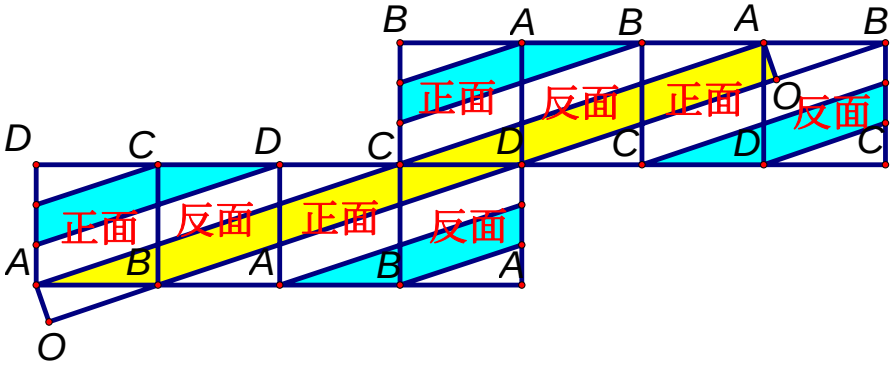


由右圖可證明包裝紙恰好完全覆蓋正方形之兩面。



(b) 將 1×1 正方形的上下邊長 n 等分，則都可構造合身的包裝紙，其為 $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\times 2\sqrt{n^2+1}$ 的矩形。依(a)的方式反覆纏繞，即可將 1×1 相片正反兩面完全覆蓋。

由右圖可證明包裝紙恰好完全覆蓋正方形之兩面。



<評分標準>

(a) 1° 舉出正確例子及包裝紙的尺寸，佔 2/7 分

2° 說明如何包裝，佔 5/7 分

(b) 1° 舉出正確方法產生無限多個包裝紙及包裝紙的尺寸，佔 2/7 分

2° 說明如何包裝，佔 5/7 分

6. 令$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\frac{a_n}{b_n}$，其中$a_n$與$b_n$爲互質的正整數。試證：對於無窮多個 n 值，不等式$b_{n+1}<b_n$成立。(八分)

<參考解法>

考慮$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2\cdot 3^m}=\frac{a_{2\cdot 3^m}}{b_{2\cdot 3^m}}$ ……（1）

與 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2\cdot 3^m-1}=\frac{a_{2\cdot 3^m-1}}{b_{2\cdot 3^m-1}}$ ……（2）

其中$a_{2\cdot 3^m}$與$b_{2\cdot 3^m}$互質，$a_{2\cdot 3^m-1}$與$b_{2\cdot 3^m-1}$互質。

因$\frac{1}{3^m}+\frac{1}{2\cdot 3^m}=\frac{3}{2\cdot 3^m}=\frac{1}{2\cdot 3^{m-1}}$，所以（1）式可改寫成：

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2\cdot 3^m}$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^m-1}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{3^m+1}+\cdots+\frac{1}{2\cdot 3^m}$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^m-1}+\frac{1}{3^m+1}+\cdots+\frac{1}{2\cdot 3^m-1}+\left(\frac{1}{2\cdot 3^m}+\frac{1}{3^m}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^m-1}+\frac{1}{3^m+1}+\cdots+\frac{1}{2\cdot 3^m-1}+\frac{1}{2\cdot 3^{m-1}}$$ ……（3）

比較（2）式與（3）式，$3^m \mid b_{2\cdot 3^m-1}$但$3^m \nmid b_{2\cdot 3^m}$，且（2）中$b_{2\cdot 3^m-1}$除了 3 以外的質數的次方都不比$b_{2\cdot 3^m}$低，故$b_{2\cdot 3^m-1}>b_{2\cdot 3^m}$。因 m 可以為任意正整數，故有無限多個 m 值使命題成立。

<評分標準>

1. 舉出正確的一些實例，2/7。
2. 發現$3^m \mid b_{2\cdot 3^m-1}$但$3^m \nmid b_{2\cdot 3^m}$，2/7。
3. 得到$b_{2\cdot 3^m-1}$除了 3 以外的質數的次方都不比$b_{2\cdot 3^m}$低，故$b_{2\cdot 3^m-1}>b_{2\cdot 3^m}$推出結論，3/7。

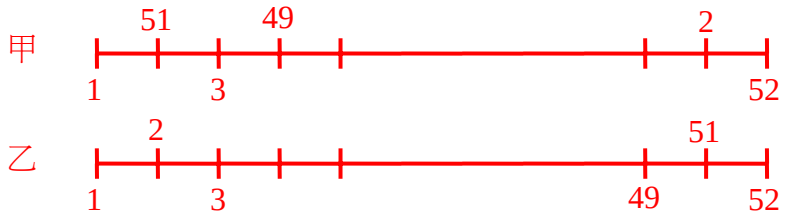
4. 一位魔術師將一疊 52 張的牌放在桌上，觀眾想要知道這疊牌的所有排列順序（牌面向上或向下無所謂）。只允許觀眾向魔術師提出「在什麼牌和什麼牌之間有多少張牌」之類的問題。有一位觀眾事先已知道這疊牌的排列順序，請問他至少要提出幾個問題才能使其他的觀眾也都能明確知道這疊牌的排列順序？(九分)

<參考解法>

	提問	魔術師回答
(1)	A_1和 A_{52}之間有幾張牌？	50
(2)	A_1和 A_3之間有幾張牌？	1
(3)	A_2和 A_{51}之間有幾張牌？	48
(4)	A_{49}和 A_{51}之間有幾張牌？	1
(5)	A_4和 A_{50}之間有幾張牌？	45
(6)	A_4和 A_6之間有幾張牌？	1
(7)	A_5和 A_{48}之間有幾張牌？	42
(8)	A_{46}和 A_{48}之間有幾張牌？	1

(9)	A_7和 A_{47}之間有幾張牌？	39
(10)	A_7和 A_9之間有幾張牌？	1
(11)	A_8和 A_{45}之間有幾張牌？	36
(12)	A_{43}和 A_{45}之間有幾張牌？	1
(13)	A_{10}和 A_{44}之間有幾張牌？	33
(14)	A_{10}和 A_{12}之間有幾張牌？	1
(15)	A_{11}和 A_{42}之間有幾張牌？	30
(16)	A_{40}和 A_{42}之間有幾張牌？	1
(17)	A_{13}和 A_{41}之間有幾張牌？	27
(18)	A_{13}和 A_{15}之間有幾張牌？	1
(19)	A_{14}和 A_{39}之間有幾張牌？	24
(20)	A_{37}和 A_{39}之間有幾張牌？	1
(21)	A_{16}和 A_{38}之間有幾張牌？	21
(22)	A_{16}和 A_{18}之間有幾張牌？	1
(23)	A_{17}和 A_{36}之間有幾張牌？	18
(24)	A_{34}和 A_{36}之間有幾張牌？	1
(25)	A_{19}和 A_{35}之間有幾張牌？	15
(26)	A_{19}和 A_{21}之間有幾張牌？	1
(27)	A_{20}和 A_{33}之間有幾張牌？	12
(28)	A_{31}和 A_{33}之間有幾張牌？	1
(29)	A_{22}和 A_{32}之間有幾張牌？	9
(30)	A_{22}和 A_{24}之間有幾張牌？	1
(31)	A_{23}和 A_{30}之間有幾張牌？	6
(32)	A_{28}和 A_{30}之間有幾張牌？	1
(33)	A_{25}和 A_{29}之間有幾張牌？	3
(34)	A_{25}和 A_{26}之間有幾張牌？	0

從提問（1）的答案可知 A_1和 A_{52}為此疊牌最外側之牌；
由提問（2）的答案可知 A_3在靠近 A_1的同一側；
由提問（3）、（4）的答案可知排列的順序有二種情況：



但從魔術師回答提問（5）A_4和 A_{50}之間的牌數為 45 張牌知情況甲是不可能的，因為此情況 A_4和 A_{50}之間的牌必小於 45，故只能是情況乙。
同理從魔術師回答提問（7）A_5和 A_{48}之間的牌數為 42 張牌知可把 A_1、A_2、A_3、A_4、A_6、A_{49}、A_{50}、A_{51}、A_{52}的順序定下。餘此類推，平均每二次提問可確定 3 張牌之順序。
在提問完（32）後，我們已確定 A_1、A_2、…、A_{24}、A_{28}、A_{30}、A_{31}、…、A_{52}的順序，只剩下 A_{25}、A_{26}、A_{27}、A_{29}這四張牌的順序未確定。當問完提問（33），這幾張牌可能的情況為

丙



丁



若提問（34）我們仍問 A_{25} 和 A_{27} 之間有幾張牌，則魔術師必定回答 1 張，此時無論情況丙或情況丁都有可能發生，故無法確定其順序。此時若改問 A_{25} 和 A_{26} 之間有幾張牌，由魔術師回答 0，即可排除情況丙，且最後一張牌 A_{27} 只有一個空位。故我們明確知道整疊牌 A_1、A_2、…、A_{51}、A_{52} 的順序（此順序可能是由上往下或由下往上）。

我們把 52 張牌視為 52 個點，將曾經被問過之間有幾張牌的兩張牌用一條線段連接，若這些路徑中存在有一孤立的線段，則這線段兩端之牌無法確定是由上往下或由下往上排列，也就無法確定整疊牌的順序。因此這些路徑中不得存在有孤立的線段，也就是說每個部份路徑至少要有二條線段連接，即每三張牌至少要問三次才可以。

<評分標準>

1° 證 26 次以下不行，3/7。

2° 證 33 次以下不行，4/7。

3° 給 34 次構想，3/7

4° 給 35 次構想或比例是 $\frac{2}{3}$ 的構想，2/7

5° 以下兩者擇一給分：

a.任何超出 50 次構造法的有用想法，1/7。

b.對於 7 張牌以上的特別情形，1/7。

6° 僅猜出比例 $\frac{2}{3}$ 或 34，其餘無結果，1/7。

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間五小時。》