注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。**可直接下載而不須申請**。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2011 小學數學競賽選拔賽複賽試題

第 一 試：應 用 題（考試時間 90 分鐘）

◎ 請將答案填入答案卷對應題號的空格內，只須填寫答案，不須計算過程。本題目卷正反面空白處可為作演算草稿紙。每題 10 分，共 120 分

1. 將一個 3×3×3 的正立方體表面塗色，共用去了 6 克的顏料。當顏料乾掉以後將該正立方體切成 27 塊單位小正立方體。若此時要將所有 27 塊的小正立方體上未塗色之面都塗上與之前相同厚度之顏料，請問尚需用多少克的顏料？

【解】

可知在原來的正立方體上共有相當於小正立方體上 6×3×3=54 個表面之面積被塗色，而所有 27 塊的小正立方體共有 27×6=162 個表面，因此未塗色的表面共有 162－54 =108 塊，而 108=54×2，故知尚需用 6×2=12 克的顏料。

答：12 克

2. 請找出所有恰由一個 1、一個 2、…、一個 9 所構成的九位數的最大公因數。

【解】

由數碼和為 45 可知這些九位數都為 9 的倍數。因這些數的最大公因數必整除其中任取兩數之差，而 123456798－123456789=9，故所求之數為 9。

答：9

3. 一個數無論從左向右讀或從右向左讀都是一樣的數稱之為「迴文數」，例如：909。請找出所有三位數迴文數的平均值。

【解一】

因任何一個數碼皆可為三位數迴文數的十位數，故其發生的可能性都相等，因此若單獨將所有三位數迴文數的十位數取出計算其平均值，則其值為 (0+10+20+…+90)÷10=45；因迴文數為三位數，故個位數與百位數必須不為 0，單獨將所有三位數迴文數的個位數取出計算其平均值，則其值為 (1+2+…+9)÷9=5；單獨將所有三位數迴文數的百位數取出計算其平均值，則其值為(100+200+…+900)÷9=500。故所求為 500+45+5=550。

【解二】

最小的三位數迴文數為 101，最大的三位數迴文數為 999，若 $\overline{aba}$ 為三位數迴文數，則(10－a) (9－b)(10－a)亦為三位數迴文數，其和為 1100，其平均值為 550。而所有三位數迴文數共有 9×10 個，它們必定成雙出現，故其平均值為 550。

答：550

4. 小明、小王、小林三人各自在自己的筆記本上寫 100 個字，同一本筆記內的這 100 個字都不相同。若有一個字同時出現在不同人的筆記本上，則將這個字從所有的筆記本上刪除。最後小明的筆記本上還剩下 61 個字而小王的筆記本上還剩下 80 個字。請問小林的筆記本上最少還剩下幾個字？

【解】

可知小明的筆記本上刪除了 39 個字而小王刪除了 20 個字。要找小林的筆記

本上最少剩下幾個字，可令這些刪除的字全部都與小林的筆記本上的字相同，此時小林的筆記本上剩下 100－39－20=41 個字。

答：41 個

5. 在一個無限大的西洋棋盤上，放置了一枚西洋棋的騎士。騎士每一次移動都是往北走 2 格並往東走 1 格，或者是往東走 2 格並往北走 1 格。在經過若干次移動後，最後騎士位於它的出發點之往北 2011 格並往東 2012 格。請問騎士總共移動了多少次？

【解】

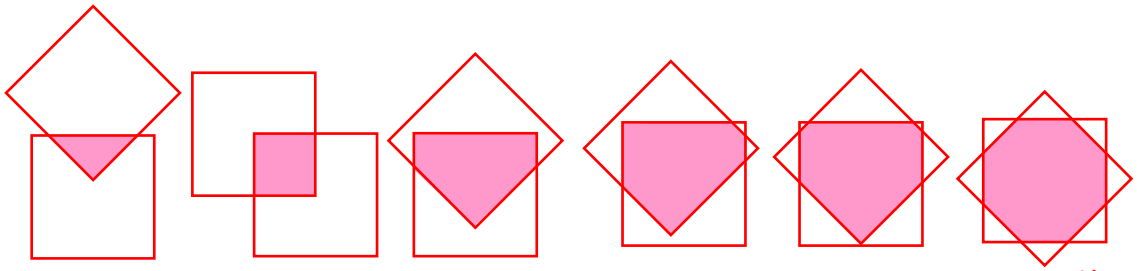
如果將往東與往北移動的格數合併計算，可知騎士每次都合計移動 3 格。最後騎士共移動了 2011+2012=4023 格，因此共移動了 4023÷3=1341 次。

答：1341 次

6. 將兩張全等的正方形紙片隨意地一上一下疊放在一起，請問它們相交部分的多邊形可以有多少種不同的邊數？

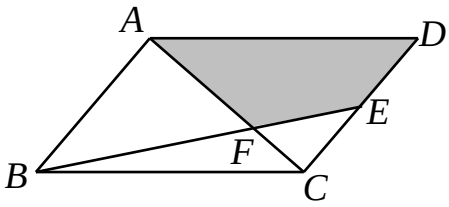
【解】

已知多邊形至少為三邊的三角形，而相交部分的多邊形至多將兩個正方形的邊皆使用到，即至多為八邊形，因此最多可以有 3、4、5、6、7、8 共 6 種不同的邊數，相交部分如下圖所示。



答：6 種

7. 已知點 E 是平行四邊形 $ABCD$ 在 CD 邊上的中點，線段 AC 與 BE 相交於點 F。已知△BFC 之面積為 120 cm^2，請問四邊形 $ADEF$ 之面積為多少 cm^2？



【解】

因 $ABCD$ 為平行四邊形，三角形 EFC 與三角形 BFA 相似，點 E 是 CD 邊上的中點，故知 EF：BF=1：2 而三角形 EFC 與三角形 BFA 之面積比為 1：4。再因三角形 EFC 面積與三角形 BCF 的面積比即為 EF：BF，故知三角形 CEF 面積為 $120\times\frac{1}{2}=60$ cm^2、三角形 BFA 面積為 $4\times60=240$ cm^2、三角形 ABC 的面積為 $240+120=360$ cm^2，此即為三角形 ACD 的面積，故可得知四邊形 $ADEF$ 之面積為 $360-60=300$ cm^2。

答：300 cm^2

8. 某公司採用 A 技術可以使每個產品的成本減少 50%、採用 B 技術可以使每個產品的成本減少 30%、採用 C 技術可以使每個產品的成本減少 20%，三項技術都互相獨立。若同時採用這三種技術於某批產品上，請問其成本共減

少多少%？

【解】 可知某公司在採用 A 技術後每個產品的成本為原來的 50%，再採用 B 技術後每個產品的成本為原來的 50%×(1－30%)=35%，接著再採用 C 技術後每個產品的成本為原來的 35%×(1－20%)=28%，因此其成本共減少 1－28%=72%。

答：72%

9. 甲、乙、丙三輛汽車都以均勻速度由 A 地開往 B 地。乙比丙晚 5 分鐘出發，出發後 40 分鐘追上丙；甲比乙晚 20 分鐘出發，出發後 1 小時 40 分鐘追上丙。請問甲出發後多少分鐘才能追上乙？

【解一】

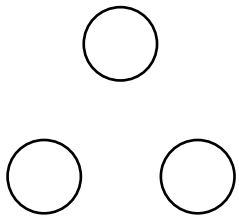
可知乙汽車行駛 40 分鐘的距離與丙汽車行駛 45 分鐘的距離相等、甲汽車行駛 100 分鐘的距離與丙汽車行駛 125 分鐘的距離相等，所以乙、丙的速度比為 45：40=9：8 而甲、丙的速度比為 125：100=5：4=10：8，因此甲、乙的速度比為 10：9，換言之，在相同距離下，甲、乙的時間比為 9：10。因甲追上乙即兩車行駛的距離相同，故甲需 $\frac{20}{10-9}\times 9=180$ 分鐘才能追上乙。

【解二】

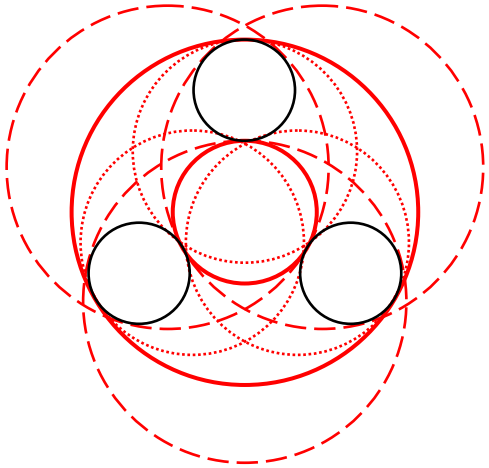
令甲、乙、丙三輛汽車的速度分別為 a、b、c，則由題意可知 $45c=40b$、$125c=100a$，即 $9a=10b$，可推得 $b=\frac{9}{10}a$。假設甲出發 t 分鐘後追上乙，則可得 $ta=(t+20)b=(t+20)\times\frac{9}{10}a$，即 $\frac{1}{10}t=18$，故 $t=180$。

答：180 分鐘

10. 請問在平面上可以畫出多少個圓同時與右圖中的三個圓都相切？



【解】 兩圓相切可分為內切與外切兩種情形。現有三個圓，故可畫出 2×2×2=8 個圓同時與三個圓都相切，如下圖所示。



答：8 個

11. 請在 11 的倍數中，找出數碼和為 60 的最小數。

【解】 數碼和為 60，要找最小的數，則要盡可能使用 9 來當數碼。因 60=9×6+6，故可利用 6 個數碼為 9 而其餘的數碼和為 6，此時再由 11 的倍數之性質可知最

小的數為 33999999。

答：33999999

12. 有一段樓梯，若地板不算台階則有 7 級台階，規定每一步只能跨一級、二級或三級，請問要登上 7 級台階共有多少種不同的走法？

【解】

可知登上 1 級台階有 1 種走法、登上 2 級台階有 2 種不同的走法，而登上 3 級台階時可直接登上、經過 2 級台階後再上 3 級台階或經過 1 級台階後直接登上 3 級台階共三類走法，故共有 1+2+1=4 種不同的走法；

登上 4 級台階時須登上 1 級台階後再直接登上 4 級台階、登上 2 級台階後再直接登上 4 級台階或登上 3 級台階後再登上 4 級台階共三類走法，故共有 1+2+4=7 種不同的走法：同理，登上 5 級台階共有 2+4+7=13 種不同的走法、登上 6 級台階共有 4+7+13=24 種不同的走法、登上 7 級台階共有 7+13+24=44 種不同的走法。

答：44 種

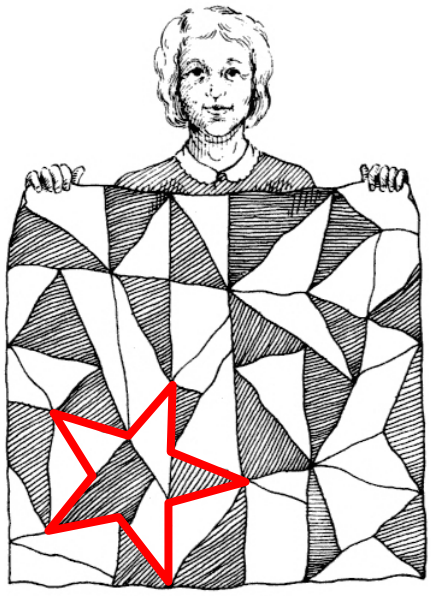
2011 小學數學競賽選拔賽複賽試題

第　二　試: 綜合能力測驗 (考試時間 60 分鐘)

_____縣市_____國民小學__年級　編號：_____姓名：_____性別：__

請將答案填入考卷中對應題號的空位內，第 2、3、4 題必須詳細寫下想法或理由，每題 25 分，共 100 分。

1. 右圖中藏有一個五角星形記號☆，請把它畫出來。



2. 有奇數位棋士進行單循環比賽，即每一位棋士都恰與其它的棋士進行一局比賽。棋士每贏得一局便可獲得 2 分，輸方則得 0 分；若雙方平手則可各獲得 1 分。現已知總得分倒數第四名的棋士之得分比倒數第三名的棋士之得分高，且除了最後三名的棋士外，其餘的棋士與最後三名的棋士之間的比賽中的得分總和皆恰為自己所得之總分數的一半。請問共有多少位棋士參加此項比賽？

【解】

可令共有 n+3 位棋士。則知排名前 n 位的每位棋士從與最後三名棋士的比賽中最多獲得 6 分，故可知排名前 n 位棋士由此最多共可獲得 $6n$ 分。而排名前 n 位的棋士彼此之間共比賽了 $\frac{n(n-1)}{2}$ 場，故知 $n(n-1)\le 6n$，即 $n\le 7$。再因已知共有奇數位棋士，故 n 為偶數。

若 n=6，可假設在這前 6 名之間的比賽都平手，即每人皆獲得 5 分，而每一位也都可與從最後三名的比賽中取勝 2 場、平手 1 場而獲得此分數，此時最後三名的棋士可由與其他六名的比賽中僅平手 2 場、而與另兩位也是最後三名的比賽都平手而共只得到 4 分，下表為滿足此情況的其中一種彼此對奕後得分的成績表，故此情形滿足題意。

名次 / 名次	1	2	3	4	5	6	7	8	9	得分
1		1	1	1	1	1	1	2	2	10
2	1		1	1	1	1	1	2	2	10
3	1	1		1	1	1	2	1	2	10
4	1	1	1		1	1	2	1	2	10
5	1	1	1	1		1	2	2	1	10
6	1	1	1	1	1		2	2	1	10
7	1	1	0	0	0	0		1	1	4
8	0	0	1	1	0	0	1		1	4
9	0	0	0	0	1	1	1	1		4

若 n=4，則這前 4 名從他們彼此之間的比賽中所得的分數總和為 12 分，因此他們也必須從與最後三名的比賽中取得 12 分。此時再因前四名與最後三名之間共有 12 場比賽，故最後三名的棋士們也從前四名的比賽中總計獲得 12 分，而他們彼此之間的比賽中所得的分數總和為 6 分，故此時可知前四名的棋士積分總和為 12+12=24 分，平均一位棋士得 6 分、後三名的棋士得分總和為 12+6=18 分，平均一位棋士得 6 分，此意味第四名的棋士無法得到比倒數第三名的棋士有更高的得分，矛盾。

若 n=2，則這前 2 名從他們彼此之間的比賽中所得的分數總和為 2 分，因此他們也必須從與後三名的比賽中取得 2 分，矛盾。

故知僅 6+3=9 位棋士參賽。　　答：9 位

3. 已知在九枚外觀完全一樣的金幣中有三枚恰重 3 克、有三枚恰重 2 克、有三枚恰重 1 克，但不知個別的重量。一位專家知道每枚金幣個別的重量，他想要只使用一個無刻度的天平向大眾驗證每一枚金幣的重量。請問他至少要用此天平秤幾次才能讓大眾信服他所言為真？如何秤？

【解】

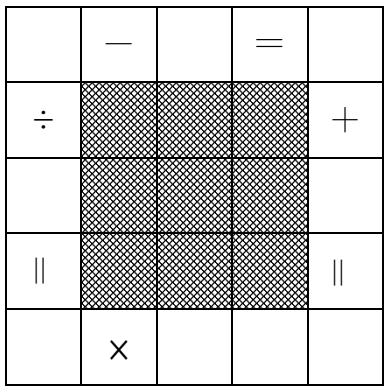
明顯可知秤 1 次無論稱幾枚金幣，也無論天平是否平衡，均不可能判定每一枚金幣的重量，而秤 2 次可利用以下手法判斷。令 A、B、C 為重 3 克的金幣，D、E、F 為重 2 克的金幣、G、H、I 為重 1 克的金幣。

第一次可將金幣 A 放置天平一端的秤盤而將金幣 G、H、I 放置於另一端的秤盤，此時平衡僅會發生在金幣 A 重量為 3 克而金幣 G、H、I 重量各為 1 克時；

第二次可將金幣 B、C 放置天平一端的秤盤而將金幣 D、E、F 放置於另一端的秤盤，此時平衡僅會發生在金幣 B、C 重量為 3 克而金幣 D、E、F 重量各為 2 克時。故只須要秤二次即可驗證每枚金幣個別的重量。

答：2 次

4. 在右圖中，方框的每一邊上都是一個等式。請將 1～8 的八個數不重複地填入小方格中，有數學符號的小方格不可再填入數，每一個小方格只能填入一個數。請問共有多少種不同的填法，可以使所有的等式都完全正確？請將您所找到的填法直接填入右圖，若不足，請自行於空白處繪圖。



【解】

可令填入的數如下：

a	−	b	=	c
÷				+
h				d
‖				‖
g	×	f	=	e

由 $a÷h=g$，且 a、g、h 為 1～8 中相異的數，故可得以下四種情形：

(i) $8÷2=4$，即 $a=8$、$h=2$、$g=4$：此時再由 $g×f=e$ 且 f、e 為 1～8 中相異的數可知 $e=4$ 或 8，矛盾；

(ii) $8÷4=2$，即 $a=8$、$h=4$、$g=2$：此時再由 $g×f=e$ 且 f、e 為 1～8 中相異的數可知 $f=3$、$e=6$。現僅剩 1、5、7 仍未決定。而由 $e=6$ 可推知 $d=5$、$c=1$、$b=7$，此時填法如下左圖所示：

8	−	7	=	1
÷				+
4				5
‖				‖
2	×	3	=	6

(iii) $6÷2=3$，即 $a=6$、$h=2$、$g=3$：此時再由 $g×f=e$ 且 f、e 為 1～8 中相異的數可知 $e=3$ 或 6，矛盾；

(iv) $6÷3=2$，即 $a=6$、$h=3$、$g=2$：此時再由 $g×f=e$ 且 f、e 為 1～8 中相異的數可知 $f=4$、$e=8$。現僅剩 1、5、7 仍未決定。而由 $e=8$ 可推知 $d=7$、$c=1$、$b=5$，此時填法如上右圖所示：

6	−	5	=	1
÷				+
3				7
‖				‖
2	×	4	=	8

答：2 種