注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。**可直接下載而不須申請**。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2011 小學數學競賽選拔賽決賽(二)試題

第 一 試 應 用 題 (考試時間 90 分鐘)

◎ 請將答案填入答案卷對應題號的空格內，只須填寫答案，不須計算過程。本題目卷正反面空白處可為作演算草稿紙。每題 10 分，共 120 分

1. 烏龜與兔子賽跑，兔子讓烏龜先向前爬行 990 m 才開始追它。已知兔子每秒跑 10 m，烏龜每十秒爬 1 m。請問兔子跑多少 m 後可追上烏龜？

【解】

可知兔子每十秒跑 100 m，即每十秒比烏龜多跑 99 m，所以經過 990÷99=10 個十秒後會追上烏龜，此時共跑了 100×10=1000 m。

答：1000 m

2. 將編號為 1 到 1000 的瓶子依序排在一個圓上。從 1 號瓶子開始放入一顆糖果，接著每間隔 14 個瓶子後，在下一個瓶子內再放入一顆糖，因此在 1、16、31、...號瓶內放入糖。當在 991 號瓶放入糖後，下次放入糖的瓶子為 6 號，並繼續每間隔 14 個瓶子後，在下一個瓶子內再放入一顆糖。依此方式一直操作下去，直到再也無法於沒有放糖的瓶子內放入糖為止。請問最後這個圓上共有多少個瓶子沒有糖？

【解】

若將瓶子從 1000 擴增至 3000 並繼續編號下去，則可推知最後一個放入糖的瓶子為 2986 號，共有 3000÷15=200 個瓶子內有被放入糖，且可觀察出每一個被放入糖的瓶子上的數除以 5 餘數皆為 1。接著將 1001 和 2001 改寫成 1、1002 和 2002 改寫成 2、...、2000 和 3000 改寫成 1000，則可知數 1 到 1000 各出現了 3 次，因此每一個有糖的瓶子之號碼除以 5 餘數皆為 1。再因 1 到 1000 中除以 5 餘數為 1 的數恰有 200 個，因此共有 1000－200=800 個瓶子未被放入糖。

答：800 個

3. 數碼和為 60 且為 11 之倍數的正整數中，請問第二小的數是什麼？

【解】

數碼和為 60，要找最小的數，則要盡可能使用 9 來當數碼。因 60=9×6+6，故可利用 6 個數碼為 9 而其餘的數碼和為 6，此時再由 11 的倍數之性質可知最小的數為 33999999，故可推知第二小的數為 34989999。

答：34989999

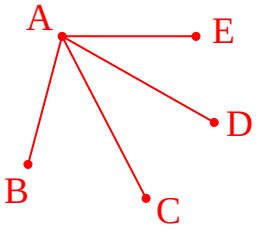
4. 有五支籃球隊進行單循環賽，當比賽進行一段時間之後，發現到當中有四隊已經比賽過的場數分別是四場、一場、三場及兩場，請問剩下的一隊已經比賽了幾場？

【解】

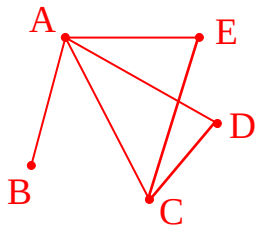
可令這五隊為 A、B、C、D、E，其中 A 隊已賽四場、B 隊已賽一場、C 隊已賽三場、D 隊已賽二場，則問題即為求出 E 隊已賽幾場。

因五隊進行單循環比賽，故每一隊至多比賽四場，故 A 隊與其餘四隊皆比

賽過了。若以線段連接的點即為兩隊之間已比賽過，如圖所示，則由此知 E 隊至少與 A 隊已比賽完畢。



因 B 隊僅賽一場且與 A 隊比賽完畢，故 B 隊只跟 A 隊比賽完畢，由此知 E 隊尚未與 B 隊比賽；因 C 隊僅賽三場且與 A 隊比賽完畢，但尚未與 B 隊比賽，故 C 隊已跟 A、D、E 隊比賽完畢，由此知 E 隊與 C 隊已比賽完畢。



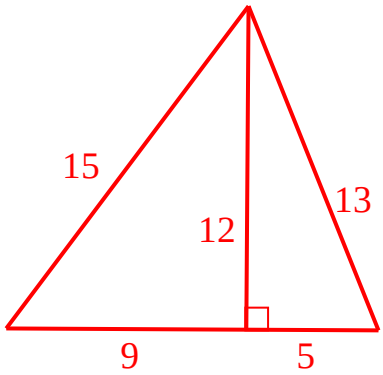
因 D 隊僅賽二場且與 A、C 隊比賽完畢，故 D 隊只跟 A、C 隊比賽完畢，由此知 E 隊尚未與 D 隊比賽。故 E 隊已比賽了二場。

答：2 場

5. 已知銳角三角形中的兩個邊與第三邊上的高之長度為 12 cm、13 cm、15 cm (不一定依此順序)。請問此三角形的面積為多少 cm^2？

【解】

由題意可知所給的三個線段有共同端點，而經過一個點至一條線的線段中以垂線段最短，故知第三邊上的高之長度為 12 cm，其餘兩邊的長度分別為 13 與 15 cm，如右圖所示。



接著便可由勾股定理得知第三邊的長度為 $\sqrt{15^2-12^2}+\sqrt{13^2-12^2}=9+5=14$ cm，故其面積為 $\frac{1}{2}\times 14\times 12=84$ cm^2。

答：84 cm^2

6. 十進制的正整數 n，它的九進制表示為一個三位數 $\overline{abc}_{(9)}$，它的六進制表示也是一個三位數 $\overline{cba}_{(6)}$。請問 n 的十進制表示是什麼？

【解】

由題意知十進制的 n 以九進制表示為 $\overline{abc}_{(9)}$，即 n 以十進制表示時可以寫成 $n=a\times 9^2+b\times 9+c=81a+9b+c$。$n$ 以六進制表示為 $\overline{cba}_{(6)}$，即 n 以十進制表示時也可寫成 $n=c\times 6^2+b\times 6+c=36c+6b+a$，所以得知

$$81a+9b+c=36c+6b+a$$

$$80a+3b=35c$$

因十進制的正整數 n 以六進制表示為 $\overline{cba}$，故知 $1\leqq a$、$c\leq 5$，$0\leqq b\leqq 5$，且由上式可判斷出 b 為 5 的倍數，因此可進一步得知 b=0 或 5。

此時當 $b=0$ 時，$80a=35c$，即 $16a=7c$，$c=16k$，其中 k 為正整數，不合。

故可推得 $b=5$，$80a+3b=35c\leq 35\times 5=175$，故可據此繼續推得 $80a\leqq 160$，即 $a=1$ 或 2。當 $a=1$ 時，$35c=95$，不合。當 $a=2$ 時，$35c=175$，$c=5$，所以 n 的十進制表示 $81\times 2+9\times 5+5=212$。

答：212

7. 若一個正整數除以它的數碼和後所得到的餘數為 22，則稱之為「幸運數」。請問最小的幸運數是什麼？

【解】

因餘數為 22，故知幸運數的數碼和最小為 23，即知幸運數至少為三位數，故從三位數來開始考慮。三位數中，數碼和為 23 有四種情形：5+9+9、6+8+9、7+7+9、7+8+8。而因 $599=23\times 26+1$、$689=23\times 29+22$，故最小的幸運數為 689。

答：689

8. 在 3 點到 4 點之間，請問在什麼時刻時針以逆時鐘轉到刻度 12 的距離等於分針以順時鐘轉到刻度 12 的距離？

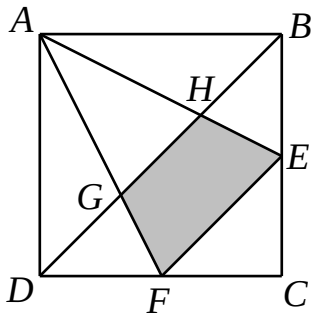
【解】

假設在 3 點 x 分時滿足題意，此時時針以順時針方向轉動 $\frac{1}{2}x°$，即時針以逆時鐘轉到刻度 12 的距離為 $90°+\frac{1}{2}x°$、分針以順時針方向轉動 $6x°$，即分針以順時鐘轉到刻度 12 的距離為 $360°-6x°$。故可得知 $90°+\frac{1}{2}x°=360°-6x°$，即 $\frac{13}{2}x=270$，故知 $x=\frac{540}{13}=41\frac{7}{13}$。

答：3 點 $41\frac{7}{13}$ 分

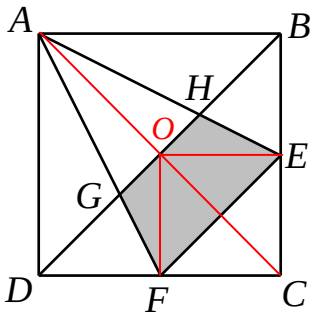
9. 正方形 $ABCD$ 的邊長為 12 cm，點 E、F 分別為 BC、CD 邊上的中點，線段 AE、AF 分別交 DB 於點 H、G。請問四邊形 $EFGH$ 之面積為多少 cm^2？

【解一】



可知正方形 $ABCD$ 的面積為 144 cm^2、三角形 BCD 面積為 72 cm^2。因為 F 為 CD 中點，故推知三角形 ADF 面積為 $144\times\frac{1}{4}=36$ cm^2。三角形 GDF 與三角形 AGB 相似，可得知 $AG:GF=AB:DF=2:1$，即三角形 GDF 面積為 $36\times\frac{1}{3}=12$ cm^2；同理，三角形 BHE 面積也為 12 cm^2；因 E、F 分別為 BC、CD 的中點，故三角形 CEF 面積為 $72\times\frac{1}{4}=18$ cm^2。所以可知四邊形 $EFGH$ 之面積為 $72-12-12-18=30$ cm^2。

【解二】



連接 AC 交 BD 於點 O。

在三角形 ADC 中，線段 AF 與 DO 為中線，可由此知 G 為三角形 ADC 的重心，故 $DG：GO=2：1$，所以三角形 GOF 之面積為三角形 DGF 之面積的$\frac{1}{2}$；同理，三角形 OHE 之面積為三角形 BHE 之面積的$\frac{1}{2}$。

由 O、E、F 分別為三角形 BCD 三邊的中點可推知三角形 OEF 之面積、三角形 ODF 之面積、三角形 BOE 之面積皆為三角形 BCD 之面積的$\frac{1}{4}$，即正方形 $ABCD$ 之面積的$\frac{1}{8}$，其值為 $144\times\frac{1}{8}=18$ cm^2，故可知三角形 GOF 之面積以及三角形 OHE 之面積皆為 6 cm^2。

故四邊形 $EFGH$ 之面積為 $18+6+6=30$ cm^2。　　答：30 cm^2

10. 平面上有 15 個點，其中任意三點不共線，以這些點為端點在它們之間連接線段，請問最多可以畫出多少條線段使得這些線段不形成以這 15 個點中某三個點為頂點的三角形？

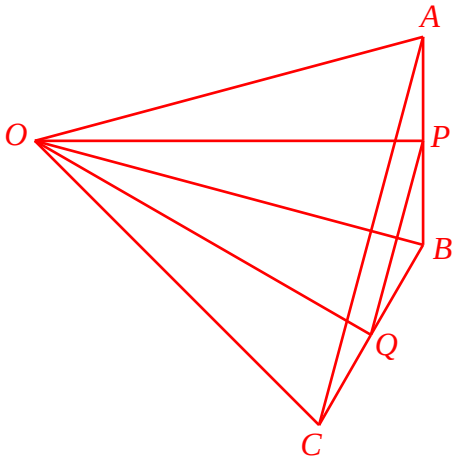
【解】

將 15 個點分成兩組，一組有 7 個點、另一組有 8 個點。若同組內的點互不相連，僅連接不同組之間的點，則可畫出 $7\times8=56$ 條線段，且這些線段皆無法形成三角形。

現驗證 56 條為最多。利用反證法，若存在畫 57 條線段仍不形成以這 15 個點中某些點為頂點的三角形，則此 57 條線段上共有 114 個端點。由鴿籠原理知這 15 個點中必存在一個點同時為 8 條線段的端點，即與另 8 個點有連線。因不可形成三角形，故知這 8 個點彼此之間不可再連線，僅可與其餘 $15-1-8=6$ 個點連線，所以最多可再畫出 $8\times6=48$ 條線段，與原先的 8 條線段合併計算共有 $48+8=56$ 條，與假設 57 條矛盾，故不合，即最多為 56 條。　　答：56 條

11. 在一個直角三角形內，三條高之中最短的長度恰等於此直角三角形斜邊長度的四分之一。請問該直角三角形內最小角之角度為幾度？

【解】



令三角形 OAP 為題目所述之直角三角形，其中 $\angle APO=90°$，依序做出三角形 OAP 的鏡像三角形 OPB、三角形 OAB 的鏡像三角形 OBC，如圖所示。

此時由作圖方式可知 PQ 為其最短的高之 2 倍，且 $AC=2PQ$。故可知 $AC=OB$ 且據此知三角形 OAC 為等邊三角形，因此題目所述之直角三角形的最小角為 $60\div4=15°$。

答：15°

12. 有六張椅子等距排成一直列，將一位女生 G 與五位男生 A、B、C、D、E 分別安排各坐在一張椅子上，請問共有多少種不同的坐法使得 A 與 G 的距離大於 B 與 G 的距離？

【解一】

可令兩人之間的距離為 1，每個人站的位置依序為 0、1、2、3、4、5。

(i) 若 G 位於 0，則 A、B 所在位置為從 1、2、3、4、5 中選二個，故共有 4+3+2+1=10 種排法；

(ii) 若 G 位於 1，若 B 位於 0，則 A 所在位置只可為 3、4、5 共 3 種排法；若 B 不位於 0，則 A、B 所在位置為從 2、3、4、5 中選二個，共 6 種排法；故共有 3+6=9 種排法；

(iii) 若 G 位於 2，則：

(a) 若 B 位於 0，則 A 所在位置只可為 5，即僅 1 種排法；

(b) 若 B 位於 1，則 A 所在位置可為 0、4、5 共 3 種排法；

(c) 若 B 位於 3，則 A 所在位置可為 0、4、5 共 3 種排法；

(d) 若 B 位於 4，則 A 所在位置只可為 5，即僅 1 種排法；

(e) 若 B 位於 5，則 A 與 G 的距離恆小於 B 與 G 的距離，故不合。

因此共有 1+3+3+1=8 種排法；

(iv) 若 G 位於 3、4、5 時，恰依序為 G 位於 2、1、0 的對稱情形，故知滿足題意的排法依序為 7、9、10 種。

因此共有 10+9+8+8+9+10=54 種排法。

C、D、E 三人排列共有 6 種，故全部有 6×54=324 種排法。

【解二】

可令兩人之間的距離為 1，每個人站的位置依序為 0、1、2、3、4、5。

現有六個位置，選三個給 A、B、G 共有 20 種選法，但 A、B、G 三人排列共有 6 種，故全部有 6×20=120 種排法。

當 A 與 G 之距離和 B 與 G 之距離相同時，G 一定要在中間。若他們的距離都是 1 時，三人可站的位置共有(0, 1, 2)、(1, 2, 3)、(2, 3, 4)、(3, 4, 5)這四種情況，此時 A、B 位置可互換，故共有 4×2=8 種情形；若他們的距離都是 2 時，三人可站的位置共有(0, 2, 4)、(1, 3, 5)這二種情況，此時 A、B 位置可互換，故共有 2×2=4 種情形。因此 A 與 G 之距離和 B 與 G 之距離相同的情形共有 8+4=12 種，即 A 與 G 之距離和 B 與 G 之距離可分出遠近的情形共有 120－12=108 種，此時由對稱性可知 A 與 G 之距離大於 B 與 G 之距離的情形共有 108÷2=54 種。

C、D、E 三人排列共有 6 種，故全部有 6×54=324 種排法。

答：324 種

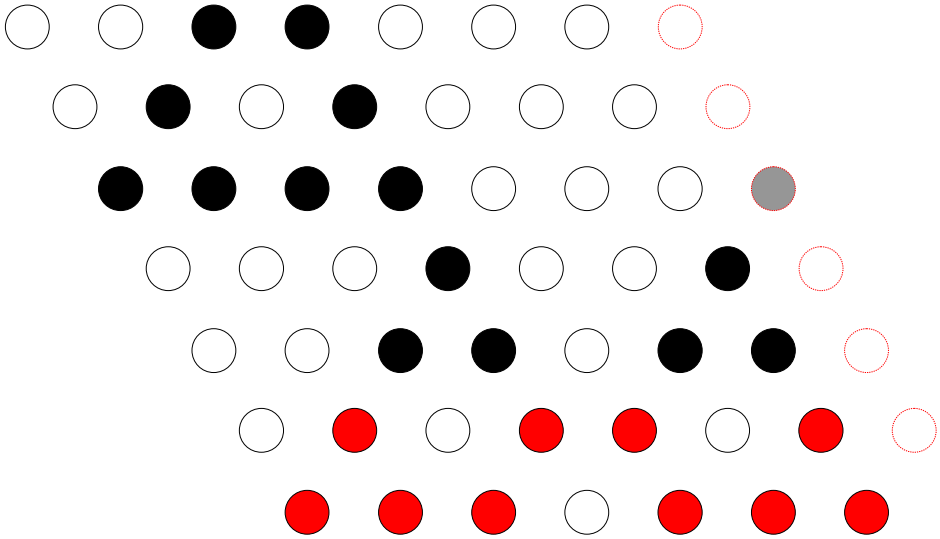
2011 小學數學競賽選拔賽決賽(二)試題

第　二　試: 綜合能力測驗 (考試時間 60 分鐘)

_____縣市_____國民小學__年級　編號：_____姓名：_____性別：__

請將答案填入考卷中對應題號的空位內，第 1、2、4 題必須詳細寫下想法或理由，每題 25 分，共 100 分。

1. 下圖中的最上一列畫出七個圓圈，並將其中二個塗黑。以下的每一列都依照某項規則將某些圓圈塗黑，圖中已畫出五列。請解釋您所觀察出的規則，並將最下面的二列，依相同的規則塗色。



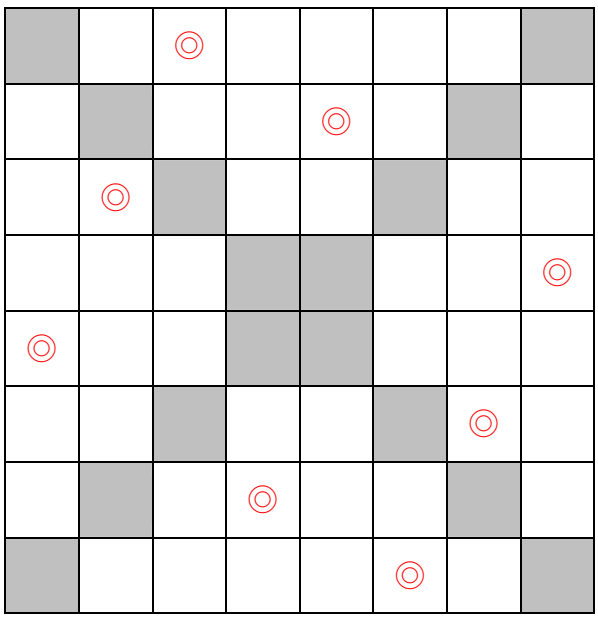
【解】

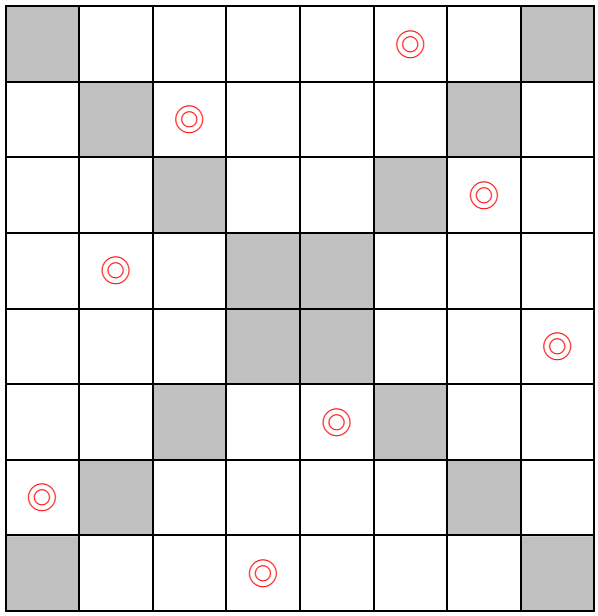
可觀察出這些圓構成了以倒正三角形為單位圖形的網格格點，亦即每一個圓都是一個小倒正三角形的頂點。

可知每一個單位小倒正三角形，是由上方的兩個頂點與下方的一個頂點所構成。此時若將上面六列裡每一列最左邊的圓圈塗色情形，複製後平移到每一列的最右邊，且將所有塗黑的圓圈視為奇數、未塗黑的圓圈視為偶數，則其規則為同一個小倒正三角形上方的兩個頂點所代表的奇偶數之和，即為同一個小倒正三角形下方的奇偶性。每列最右側的圓圈視同將上列最左側的圓圈移到最右側，依此規則所得的結果，最下面兩列的結果如上圖。

2. 在如圖 8x8 的方格表的小方格內放棋子，每個小方格內至多放一枚棋子，塗灰色的格子內不可放棋子，且使得每行、每列、每條與水平線夾 45°的斜線上的小格子都至多只能有一枚棋子。請問在此方格表內至多共可以放多少枚棋子？如何放？

【解】 因共有 8 行，故最多可放 8 枚，如下二圖為兩種放置方法。





答：8 枚

3. 在右側的除法算式中，只知道其中的 2、0 兩個數碼，其餘殘缺的數碼都用「＊」來表示，請問被除數是多少？請列出全部算式。

```
      **2**
  ** )*******
       **
     -----
       ***
       ***
     -----
         **
         **
     -----
          0
```

【解】

由除式的運算規則可令這個除式為

$$\begin{array}{rr|l} & & KL2MN \\ AB & & CDEFGHJ \\ & & PQ \\ \hline & & RFG \\ & & RFG \\ \hline & & \quad HJ \\ & & \quad HJ \\ \hline & & \quad\ 0 \end{array}$$

可先觀察出 $L=M=0$；由 $2\times\overline{AB}=\overline{RFG}$ 為三位數可再觀察出 $R=1$、$K=1$、$P=A$、$Q=B$、$N=1$、$H=A$、$J=B$；接著由除式內部第一層的三位數 $\overline{CDE}$ 減去二位數 $\overline{PQ}$ 後得到的值為數碼 $R=1$ 可知 $\overline{CDE}=100$、$\overline{PQ}=99=\overline{AB}$，故 $\overline{RFG}=2\times\overline{AB}=198$，此時已可將除式完整寫出如右。

$$\begin{array}{rr|l} & & 10201 \\ 99 & & 1009899 \\ & & 99 \\ \hline & & 198 \\ & & 198 \\ \hline & & \quad 99 \\ & & \quad 99 \\ \hline & & \quad\ 0 \end{array}$$

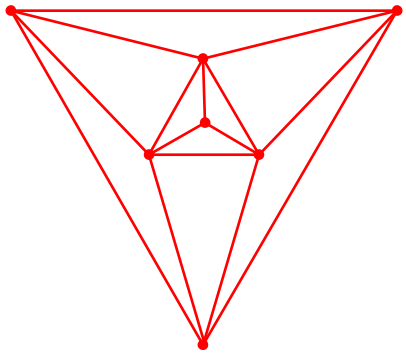
因此被除數為 1009899。

答：1009899

4. 平面上有 7 個點，在此平面上的兩個點可用一條直線段相連接，要求所有的直線段在端點以外都互不相交。請問最多可以連接多少條直線段？請畫出您的結果。

【解】

由於這些直線段互不相交，因此當連接的直線段最多時，由各線段所圍出的多邊形必須是三角形，否則可在其中再添加一條對角線。假設最多可連 E 條線段，且可圍出 F 個面(圖形最外側的三線段也算圍成一無限三角形)，則 $3F=2E$，即 $F=\frac{2}{3}E$。根據歐拉定理，$V+F=E+2$，其中 V 為頂點數目，故知 $7+\frac{2}{3}E=E+2$，即 $E=15$。如圖即為一個例子。



答：15 條