注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。**可直接下載而不須申請**。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

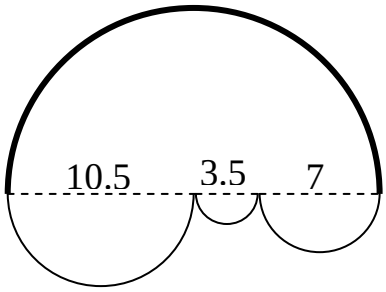
2011 小學數學競賽選拔賽決賽(一)試題

第 一 試 應 用 題 (考試時間 90 分鐘)

◎ 請將答案填入答案卷對應題號的空格內，只須填寫答案，不須計算過程。本題目卷正反面空白處可為作演算草稿紙。每題 10 分，共 120 分

1. 如圖，用粗繩圍上面的一個半圓，用細線圍下面的三個半圓。請問粗繩與細線長度之差為多少 cm？

(取 $\pi=\frac{22}{7}$)



【解】

可知上半圓直徑為 10.5+3.5+7=21 cm；下面的三個半圓直徑和為 10.5 +3.5 +7 =21 cm。故粗繩與細線長度相等，即其差為 0 cm。

答：0 cm

2. 一開始時 A、B、C 三人都有一些糖果。A 首先分別給了 B 和 C 一些糖果使得他們的糖果數都成為原先的 3 倍，接著 B 分別給了 C 和 A 一些糖果使得他們的糖果數都成為之前的 3 倍，最後 C 分別給了 A 和 B 一些糖果使得他們的糖果數都成為之前的 3 倍，最後這三人每人的糖果數都是 27 顆。請問一開始時 A 有多少顆糖果？

【解一】

可知三人的糖果總數為 81 顆。令 A 一開始時有 n 顆糖果，則 B 和 C 一開始時共有 $81-n$ 顆糖果，因此在 A 給了 B 和 C 糖果之後，A 的糖果數為 $81-3(81-n)=3n-162$ 顆。在經過 B 與 C 分別給 A 糖果之後，A 的糖果數成為 9 倍，即 $9(3n-162)=27$，故 $n=55$。

【解二】

因最後三人的糖果數都是 27 顆，而最後一次是 C 分別給了 A 和 B 一些糖果使得他們的糖果數都成為之前的 3 倍，在此之前，A、B 分別都有 27÷3=9 顆，即 C 有 27+2×(27－9)=63 顆，而在此之前為 B 分別給了 C 和 A 一些糖果使得他們的糖果數都成為之前的 3 倍，故在此之前，A、C 分別有 9÷3=3 顆、63÷3=21 顆，即 B 有 9+(9－3)+(63－21)=57 顆，而在此之前為 A 先分別給了 B 和 C 一些糖果使得他們的糖果數都成為原先的 3 倍，故在此之前，B、C 分別有 57÷3=19 顆、21÷3=7 顆，即 A 一開始時有為 3+(57－19)+(21－7)=55 顆。

答：55 顆

3. 甲、乙兩組同時作一道路工程，甲組分得的公尺數是乙組的一半，甲組每天作 20 公尺，乙組每天作 36 公尺，甲組完成時，乙組仍剩 40 公尺。請問乙組分配的工作為多少公尺？

【解一】

可令甲組一共工作 a 天完成工作，即甲組的工作量為 $20a$ 公尺。因甲組分得

的公尺數是乙組的一半，故可知乙組比甲組多作的工作量即為甲組的工作量，而在甲組工作的 a 天中，乙組的工作量比甲組多了$(36-20)a=16a$ 公尺，所以可得 $20a=16a+40$，即 $a=10$。因此知甲組分配的工作為 $20a=200$ 公尺，乙組分配的工作為 $200\times2=400$ 公尺。

【解二】

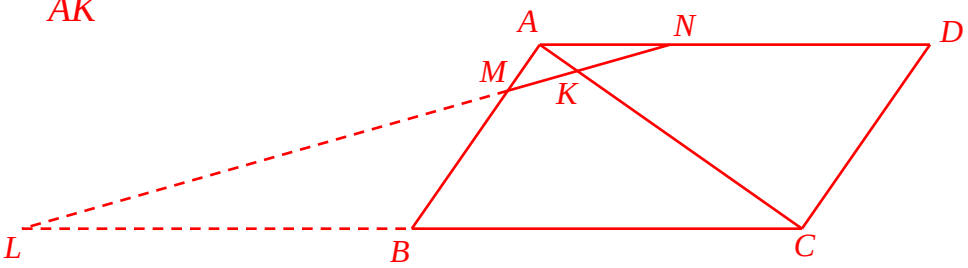
甲組分得的公尺數是乙組的一半，將甲組的「半公尺」視為一份，乙組的「一公尺」視為一份，則甲組與乙組的份數相同，甲組每天作 40 份，乙組每天作 36 份，甲組完成時，乙組仍剩 40 公尺(份)，即總共工作 $40\div(40-36)=10$ 天，故乙組分配的工作為 $36\times10+40=400$ 公尺

答：400 公尺

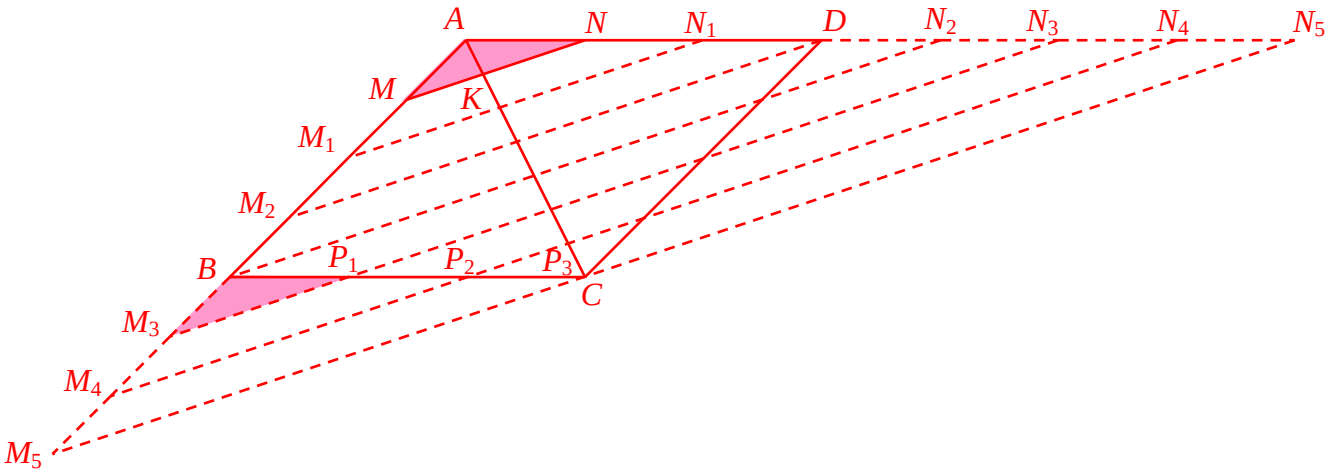
4. 在平行四邊形 $ABCD$ 中，M、N 分別落在 AB 邊與 AD 邊上使得 $AB=4AM$ 、$AD=3AN$ 。若 K 為 MN 與 AC 的交點，已知 AK=2 cm，請問 AC 之長為多少 cm？

【解一】

如圖，延長 MN、BC 且其相交於 L。由題意可知 $BM=3AM$，且可推得三角形 BLM 與三角形 ANM 為兩個相似三角形，故知 $BL=3AN$，即 $BC=AD=3AN$，故 $LC=6AN$。同樣可推得三角形 CLK 與三角形 ANK 為兩個相似三角形，故 $CK=6AK$，即 $\frac{AC}{AK}=7$ ，已知 AK=2 cm，故 AC=14 cm。



【解二】



可知 M 為 AB 邊上最靠近 A 的四等分點、N 為 AC 邊上最靠近 A 的三等分點。如圖，將 AB 邊上的四等分點 M_1、M_2 皆取出並延長 AB 後，繼續以 AM 的長度為單位依序取出 M_3、M_4、M_5、…，接著同樣將 AD 邊上的三等分點 N_1 取出並延長 AD 後，繼續以 AN 的長度為單位依序取出 N_2、N_3、N_4、N_5、…。依序連接

M_1N_1、M_2D、BN_2、M_3N_3、M_4N_4、M_5N_5、…，再令 P_1、P_2、P_3 依序為 M_3N_3、M_4N_4、M_5N_5 與 BC 邊的交點。則知

$$MN // M_1N_1 // M_2D // BN_2 // M_3N_3 // M_4N_4 // M_5N_5 // \cdots。$$

此時可得 $\frac{AN}{AM}=\frac{NN_1}{MM_1}=\frac{N_1D}{M_1M_2}=\frac{DN_2}{M_2B}=\frac{N_2N_3}{BM_3}=\frac{N_3N_4}{M_3M_4}=\frac{N_4N_5}{M_4M_5}$，故知

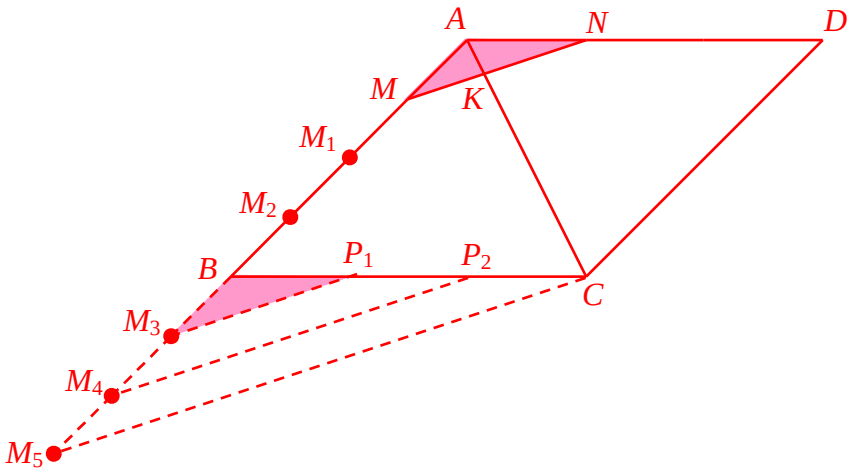
$$\triangle M_3BP_1 \cong \triangle MAN，$$

所以 $BP_1=AN$。

又因 $M_3P_1 // M_4P_2 // M_5P_3$ 且 $BM_3=M_3M_4=M_4M_5$，故 $AN=BP_1=P_1P_2=P_2P_3$ 且點 P_3 與點 C 重合，因此可得 AC 被這些平行線均分，即 $AK=\frac{AC}{7}$。

現已知 AK=2 cm，故 AC=14 cm。

【解三】



在 AB 邊及其延長線上取 $AM=MM_1=M_1M_2=M_2B=BM_3=M_3M_4=M_4M_5$，接著在 BC 邊上取 $BP_1=P_1P_2=P_2C$，連接 M_3P_1、M_4P_2、M_5C，如圖所示。

此時在 $\triangle AMN$ 與 $\triangle BM_3P_1$ 中，$\angle M_3BP_1=\angle MAN$、$AM=BM_3$、$AN=BP_1$，故

$$\triangle M_3BP_1 \cong \triangle MAN，$$

因此 $\angle BM_3P_1=\angle AMN$，據此可知 $M_3P_1 // MN$。

再由 $\frac{BM_3}{BP_1}=\frac{M_3M_4}{P_1P_2}=\frac{M_4M_5}{P_2C}$ 可得 $M_3P_1 // M_4P_2 // M_5C$，即知 $M_5C // MK$。再由平行線截三角形定理得知 $\frac{AM}{AM_5}=\frac{AK}{AC}=\frac{AM}{7AM}=\frac{1}{7}$。現已知 AK=2 cm，故 AC=14 cm。

答：14 cm

5. 一位農夫販賣自己農場裡生產的牛奶、奶油及起士。他有容量由小到大依序為 15、16、18、19、20 與 31 公升的桶子各一個，其中有一桶裝滿了起士，而奶油及牛奶裝滿了其它的 5 桶。若裝牛奶的桶子之總容量為裝奶油的桶子之總容量的 2 倍，請問裝起士的那個桶子的容量是多少公升？

【解】

由裝牛奶的桶子之總容量為裝奶油的桶子之總容量的 2 倍，可知裝牛奶與裝

奶油的桶子之總容量必為 3 的倍數，將桶子容量由小到大除以 3 之後，其餘數依序為 0、1、0、1、2、1，全部桶子之總容量在除以 3 之後的餘數為 2，因此裝起士的桶子的容量在除以 3 之後的餘數必為 2，即 20 公升的桶子，此時裝奶油的桶子為 15 公升與 18 公升，總容量為 33 公升、裝牛奶的桶子為 16 公升、19 公升與 31 公升，總容量為 66 公升，滿足題意。

答：20 公升

6. 在非負整數數列 19、99、80、19、61、…中，由第三項起每一項都是前面兩項之差。請問此數列的第 2011 項是什麼？

【解】

先觀察此非負整數數列的前幾項：19、99、80、19、61、42、19、23、4、19、15、4、11、7、4、3、1、2、1、1、0、1、1、0、…。可知從第 19 項起，會以 1、1、0 循環重複出現。因 2011－18=1993=3×664＋1，故第 2011 項為 1、1、0 這三項中的第一項，即為 1。

答：1

7. 將 1000 元全部分給三對夫婦；A 女士比 B 女士多 10 元、C 女士比 A 女士多 10 元，A、B、C 三位女士共分得 396 元。已知 D 先生分得的錢數與他的太太一樣多、E 先生分得的錢數是他的太太的$1\frac{1}{2}$倍、F 先生分得的錢數是他的太太的 2 倍。請問分到最少錢數的一對夫婦共分得多少元？

【解】

可推知 C 女士比 B 女士多 20 元，且因 A、B、C 三位女士共分得 396 元，故知 B 女士得(396－10－20)÷3=122 元，據此可知 A 女士得 132 元、C 女士得 142 元。而 D、E、F 三位先生共分得 1000－396=604 元，此為偶數，故三人分得的錢數必為皆偶數或其中兩人為奇數。但 D、F 兩位先生分得的錢數必因太太的錢數都是偶數而知也皆為偶數，故 E 先生所分得的錢數也是偶數，即 E 先生的太太為 4 的倍數，因此 A 女士為 E 先生的太太，且 E 先生分得 198 元。此時可分成以下 2 種情況討論：

(i) B、F 為夫妻，C、D 為夫妻：此時 D 先生得 142 元、F 先生得 244 元，三位先生共得 584 元，矛盾；

(ii) B、D 為夫妻，C、F 為夫妻：此時 D 先生得 122 元、F 先生得 284 元，三位先生共得 604 元，滿足題意。

此時 A、E 共得 330 元；B、D 共得 244 元；C、F 共得 426 元，故分得最少錢數的夫婦共得 244 元。

答：244 元

8. 箱子內共有 10 個球，球上分別編上 1、2、…、10 號，每個號碼各一個球。每次從箱子中同時取出兩個球，要求取出兩球上編號的總和大於 10，請問共有多少種不同的取法？

【解一】

當取出的一顆球為 1 時，僅另一顆球為 10 才滿足，故只有 1 種；

當取出的一顆球為 2 時，另一顆球為 9、10 才滿足，故有 2 種；

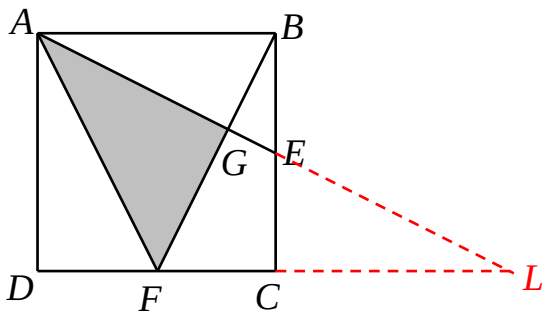
當取出的一顆球為 3 時，另一顆球為 8、9、10 才滿足，故有 3 種；
當取出的一顆球為 4 時，另一顆球為 7～10 才滿足，故有 4 種；
當取出的一顆球為 5 時，另一顆球為 6～10 才滿足，故有 5 種；
當取出的一顆球為 6 時，另一顆球為 5、7～10 才滿足，故有 5 種；
當取出的一顆球為 7 時，另一顆球為 4～6、8~10 才滿足，故有 6 種；
當取出的一顆球為 8 時，另一顆球為 3～7、9~10 才滿足，故有 7 種；
當取出的一顆球為 9 時，另一顆球為 2～8、10 才滿足，故有 8 種；
當取出的一顆球為 10 時，另一顆球為 1～9 皆滿足，故有 9 種；
但每種取法都重複算二次，因此共有(1+2+3+4+5+5+6+7+8+9)÷2=25 種。

【解二】

從 10 個球的箱子內取兩個球，共有 45 種不同的取法。
當取出兩球的總和等於 10 時，10=1+9=2+8=3+7=4+6，有 4 種；
當取出兩球的總和等於 9 時，9=1+8=2+7=3+6=4+5，有 4 種；
當取出兩球的總和等於 8 時，8=1+7=2+6=3+5，有 3 種；
當取出兩球的總和等於 7 時，7=1+6=2+5=3+4，有 3 種；
當取出兩球的總和等於 6 時，6=1+5=2+4，有 2 種；
當取出兩球的總和等於 5 時，5=1+4=2+3，有 2 種；
當取出兩球的總和等於 4 時，4=1+3，有 1 種；
當取出兩球的總和等於 3 時，3=1+2，有 1 種；
故取出兩球上編號的總和大於 10 共有 45－20=25 種不同的取法。

答：25 種

9. 正方形 $ABCD$ 之面積為 120 cm^2，點 E、F 分別為 BC、CD 邊上的中點，點 G 是線段 BF 和 AE 之交點，如圖所示。請問三角形 AFG 的面積為多少 cm^2？



【解】 延長 AE、CD 且其相交於 L。由 E 為 BC 中點可知 $BE=CE$，再由對頂角 $\angle AEB=\angle LEC$ 且 $\angle ABE=90^\circ=\angle LCE$ 即可推得三角形 ABE 與三角形 LCE 為兩個全等三角形，故知 $CL=AB$。因 F 為 CD 中點，即知 $AB：FL=2：3$。再因 $AB//FL$ 可知三角形 ABG 與三角形 LFG 為兩個相似三角形，故 $BG：FG= AB：FL=2：3$。因此三角形 AFG 之面積為三角形 ABF 之面積的 $\frac{3}{2+3}=\frac{3}{5}$。此時由 F 為 CD 中點可推知三角形 ABF 之面積為正方形 $ABCD$ 之面積的 $\frac{1}{2}$，故三角形 AFG 之面積為 $120\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=36\,cm^2$。

Ans:36 cm^2

10. 在 777 的倍數中，請找出最小的正整數使得它的數碼和為最小。

【解】

因 777 可被 3 整除，故其倍數的數碼和至少為 3。而 777 的倍數中，數碼和為 3 最小的正整數為 10101=777×13。

答：10101

11. 將一個 $n\times n\times n$ 的正立方體木塊表面塗上紅色，然後將它切成 1×1×1 的小正立方體，仔細觀察這些小立方體，發現只有一個表面塗上紅色的小立方體數量等於只有二個表面塗有紅色的五倍。請問 n 之值為多少？

【解】

觀察可知一個表面塗上紅色的小立方體數量為 $6\times(n-2)\times(n-2)$、二個表面塗有紅色的小立方體數量為 $12\times(n-2)$。故可由題意得知

$$6(n-2)(n-2)=5\times12(n-2)$$

$$n-2=10$$

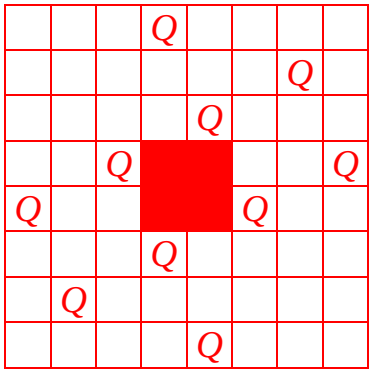
$$n=12$$

答：12

12. 在 8×8 的西洋棋盤上，中央的 2×2 區域被設定成障礙區，西洋棋裡的皇后不得放置在障礙區裡，也不得穿過障礙區攻擊其它棋子。請問在此棋盤上最多可放置多少枚皇后使得任意的兩枚皇后都無法互相攻擊？(註：西洋棋裡的皇后可攻擊同一行、同一列或與水平線夾 45 度角的同一斜行上的棋子)

【解】

可知每一條完整的列最多可放置 1 枚皇后而被隔開的列最多可放置 2 枚皇后，故可知最多可放置 6×1+2×2=10 枚皇后，如下圖所示。



答：10 枚

2011 小學數學競賽選拔賽決賽(一)試題

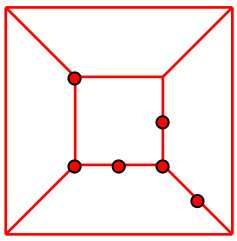
第　二　試: 綜合能力測驗 (考試時間 60 分鐘)

_____縣市_____國民小學__年級　編號：_____姓名：_____性別：__

請將答案填入考卷中對應題號的空位內，第 1、2、3 題必須詳細寫下想法或理由，每題 25 分，共 100 分。

1. 請問在一個正立方體的表面上最少可以標示幾個黑點使得正立方體上沒有任兩個面能有一樣多個黑點？怎樣安排這些黑點？(註：若一個黑點落在一個面的頂點或邊上，即可視為該黑點落在該表面上。)

【解】



為了使標示的黑點最少，可先假設六個面上被標示的點之數目分別為 0、1、2、3、4、5，因此最少須有 5 個點，但可發現 5 個點是不夠的，因為這 5 個點必須落在同一面上，此時其對面必有 0 個點被標示、其餘四個面必須合計共有 1+2+3+4=10 個點，換言之，每一個點都必須在這四個面的其中兩個面上，因此每一個點都要在共同擁有的頂點上，每個面僅有 4 個頂點，不可能在其頂點上標示 5 個黑點。所以最少須有 6 個點，可由如圖的標記方式得到。

答：6 個

2. 有標記 1g，2g，3g，5g 的砝碼各一個，已知其中有一個砝碼的重量不正確(可能較重也可能較輕)，請問至少要用無刻度之天平秤幾次才能把這個重量不正確的砝碼找出，並說出其較重或較輕？請說明每次的秤法。

【解】

只用天平秤一次，無論天平是否平衡均無法找出重量不正確的砝碼。若用天平秤二次，可利用以下方式判斷：

第一次稱時將 1g、2g 的砝碼置於天平的一端，3g 的砝碼置於另一端。

若平衡，則重量不正確的即為 5g 的砝碼，接著第二次秤時將 2g、3g 的砝碼置於天平的一端，5g 的砝碼置於另一端，此時即可得知 5g 的砝碼較重或較輕；

若不平衡，則 5g 的砝碼是重量正確的砝碼，接著第二次秤時將 2g、3g 的砝碼置於天平的一端，5g 的砝碼置於另一端：

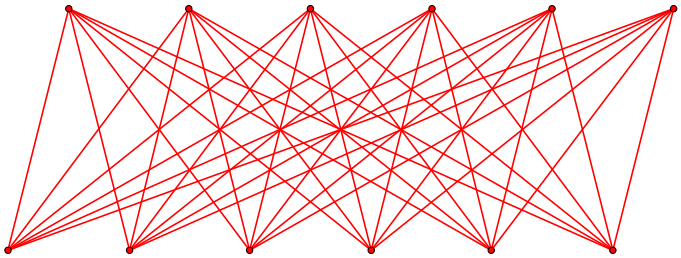
- 若平衡，則重量不正確的即為 1g 的砝碼，此時從第一次秤時天平的傾斜情況可得知 1g 的砝碼較重或較輕；
- 若 5g 的砝碼較重，則 1g 的砝碼是重量正確的砝碼，2g、3g 的砝碼中有一個是重量較輕的砝碼，此時從第一次秤時天平的傾斜情況可得知何者較輕；
- 若 5g 的砝碼較輕，則 1g 的砝碼是重量正確的砝碼，2g、3g 的砝碼中有一個是重量較重的砝碼，此時從第一次秤時天平的傾斜情況可得知何者較重。

答：2 次

3. 平面上有 12 個點，其中任意三點都不共線，以這些點為端點在它們之間連接線段，請問最多可以畫出多少條線段使得這些線段不形成以這 12 個點中某三個點為頂點的三角形？

【解】

將 12 個點分成兩組，每一組中各有 6 個點。若同組內的點互不相連，僅連接不同組之間的點，則可畫出 6×6=36 條線段，且這些線段皆無法形成三角形。



現驗證 36 條為最多。利用反證法，若存在畫 37 條線段仍不形成以這 12 個點中某三個點為頂點的三角形，則此 37 條線段上共有 74 個端點。由鴿籠原理知這 12 個點中必存在一個點同時為 7 條線段的端點，即與另 7 個點有連線。因不可形成三角形，故知這 7 個點彼此之間不可再連線，僅可與其餘 12－1－7=4 個點連線，所以最多可再畫出 7×4=28 條線段，與原先的 7 條線段合併計算共有 28+7=35 條，與假設 37 條矛盾，故不合，即最多為 36 條。

答：36 條

4. 有六張全等的正六邊形紙片，已知可將其中的三張紙片各切為二片，使得全部的九張紙片拼成一個正三角形。請在下左圖的六個正六邊形中沿虛線繪出您的切法，並在下右圖的正三角形中沿虛線繪出您的拼法。

