注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。**可直接下載而不須申請**。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

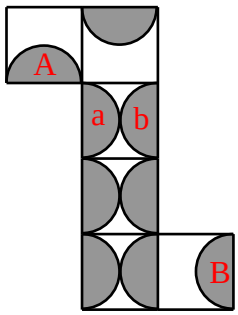
Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2011 小學數學競賽選拔賽初賽試題

第 二 試：應 用 題 (考試時間 90 分鐘)

◎ **請將答案填入答案卷對應題號的空格內，只須填寫答案，不須計算過程。本題目卷正反面空白處可為作演算草稿紙。每題 25 分，共 300 分**

1. 若將右圖的正立方體展開圖組成一個正立方體，請問有多少個半圓的直徑會完全重合在一起？



【解】

操作後可知右圖中的半圓 A 與 a、B 與 b 會重合，即有 4 個半圓的直徑會完全重合在一起。

答：4 個

2. 某個小島上的每一隻猴子都蒐集了相同數目的堅果並且每一隻猴子都對其它的每一隻猴子丟擲一顆堅果，但堅果只要丟擲出去就不見了。最後這些猴子總共還有 33 顆堅果，且每一隻猴子至少有 2 顆堅果。請問每一隻猴子原來各蒐集了多少顆堅果？

【解】

由最後每一隻猴子至少仍有 2 顆堅果，且總和為 33 顆可知有 11 隻猴子每一隻猴子各有 3 顆堅果或有 3 隻猴子每一隻猴子各有 11 顆堅果這兩種情況。無論是哪一種情況，都可逆推得知每一隻猴子原來各蒐集了 11+3－1=13 顆堅果。

答：13 顆

3. 已知一個四邊形的四條邊與其一條對角線的長度分別為 1 m、2 m 、2.8 m、5 m 與 7.5 m(此長度並未依序列出)。請問這條對角線的長度為多少 m？

【解】

可知四邊形的四條邊與其中一條對角線可分成兩個三角形，其中對角線為其共用邊。因已知的長度中僅 2.8 m 與 5 m 之和大於 7.5 m，故由三角不等式可得 7.5 m 與 5 m、2.8 m 必形成一個三角形，也因此可推知 1 m 與 2 m 必為另一個三角形的兩條邊，再由三角不等式可知僅 2.8m 小於 1 m+2 m，故知對角線的長度必為 2.8 m。

答：2.8 m

4. 某個小島上正進行總統選舉，候選人可分為兩種人：恆說實話的老實人與恆說謊話的騙子。有一次政見辯論會上 7 位候選人圍坐在一張圓桌前，每位候選人都聲稱他左右兩邊的兩位候選人中恰有一位是騙子。請問這 7 位候選人中有幾位是老實人？

【解】

可知老實人坐在 1 位老實人與 1 位騙子之間，而騙子必坐在兩位騙子或兩位老實人之間。若圍坐圓桌前的候選人中至少有 1 位老實人，則由以上推論可判斷出老實人的候選人數必須是騙子的候選人數之兩倍，即總候選人數必須是 3

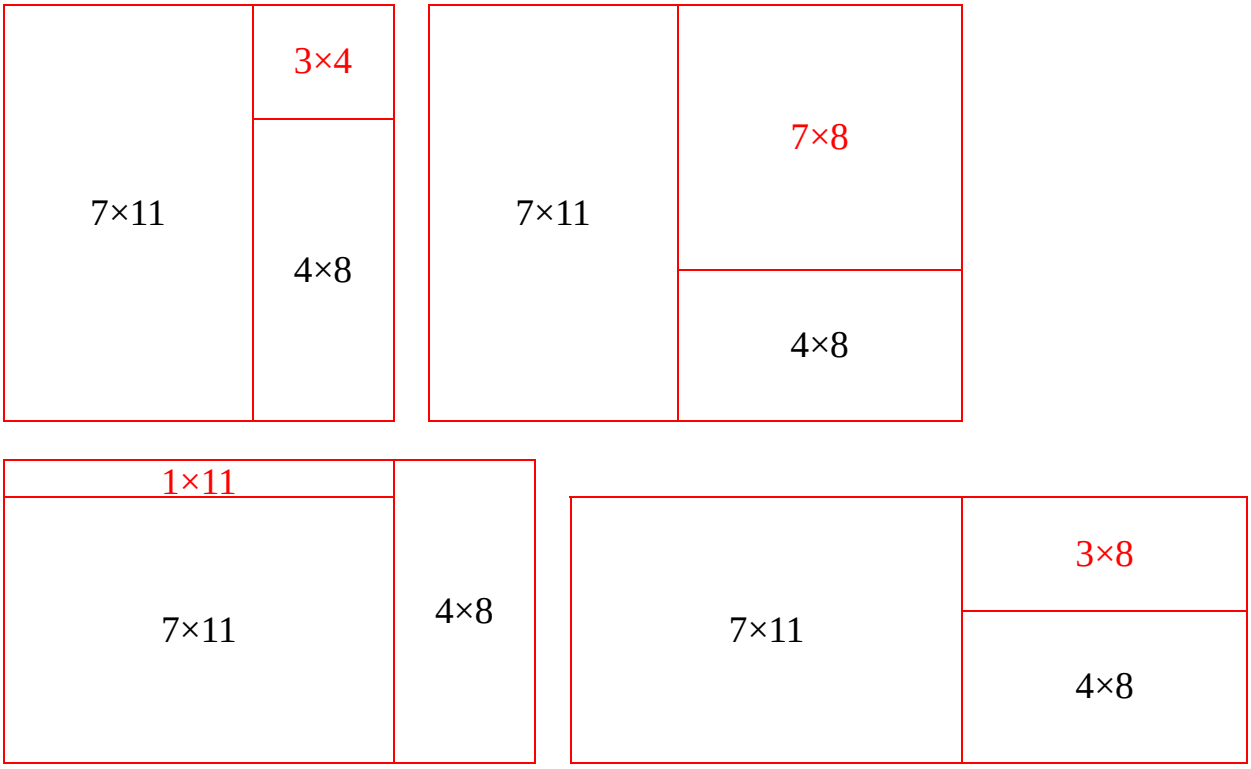
的倍數。但 7 不是 3 的倍數，矛盾，即當中沒有老實人。

答：0 位

5. 將一個 7×11 矩形、一個 4×8 矩形與一個紅色矩形，在互不重疊的情況下恰可拼成一個大矩形，請問這個紅色矩形可以有多少種不同的面積？

【解】

因這兩個已知的矩形共有四種排列方式，故紅色矩形至多有四種不同的可能。如下圖，可知可由 3×4、7×8、1×11 與 3×8 這四種矩形來拼成。



答：4 種

6. 某個小島上有 100 位漁夫，每人至少捕到 1 條魚，但沒有人捕到超過 7 條的魚、98 位漁夫沒有捕到超過 6 條的魚、95 位漁夫沒有捕到超過 5 條的魚、87 位漁夫沒有捕到超過 4 條的魚、80 位漁夫沒有捕到超過 3 條的魚、65 位漁夫沒有捕到超過 2 條的魚、30 位漁夫沒有捕到超過 1 條的魚。請問這 100 位漁夫總共捕到多少條魚？

【解】

由題意可知分別捕到 7、6、5、4、3、2、1 條魚的漁夫依序有 100－98=2 位、98－95=3 位、95－87=8 位、87－80=7 位、80－65=15 位、65－30=35 位、30－0=30 位，因此共捕到了 7×2+6×3+5×8+4×7+3×15+2×35+1×30=245 條魚。

答：245 條

7. 在一個箱子內有 6 個紅球、3 個白球、2 個綠球及 1 個黑球。請問同時要隨機至少取出幾個球才能保證被取出的球至少有三種不同顏色？

【解】 由數據可知取出的球沒有三種以上的顏色，最壞的情況可取 9 個，此即為將 6 個紅球與 3 個白球都取出的情形，再多取一個球即可保證有三種不同顏色，因此至少必須取出 10 個球才能保證至少有三種不同顏色的球被取出。

答：10 個

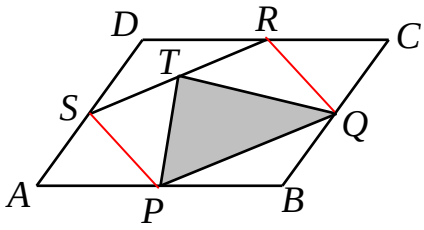
8. 從 101 個正整數中，任意挑選二個數（也可挑選同一個數兩次），計算將一個數除以另一個數之值，請問至多可以得出多少個不同的商？

【解】

可知在這 101 個正整數兩兩互質時，可以得出最多個不同的商。若一個數最多只能選取一次時，因分母固定時，分子有 100 種不同的選擇，故此時共可得出 101×100=10100 個不同的商。而一個數被同時挑選兩次時，無論選取的數是哪一個數，所得的商都是 1。因此至多可得出 10100+1=10101 個不同的商。

答：10101

9. 平行四邊形 $ABCD$ 中，點 P、Q、R、S 分別為邊 AB、BC、CD、AD 的中點，而點 T 為線段 SR 的中點。已知四邊形 $ABCD$ 的面積為 120 cm^2，請問△PQT 面積為多少 cm^2？



【解】

連結 SP、RQ。因點 P、Q、R、S 分別為邊 AB、BC、CD、AD 的中點，故四邊形 $PQRS$ 也是平行四邊形且其面積為平行四邊形 $ABCD$ 的 $\frac{1}{2}$。再因 T 為邊 SR 的中點，故△PQT 面積佔平行四邊形 $PQRS$ 面積的 $\frac{1}{2}$，即佔平行四邊形 $ABCD$ 面積的 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，故△$PQT$ 面積為 30 cm^2。

答：30 cm^2

10. 請問有多少個三位數是 3 的倍數且它的每個數碼都是偶數？

【解一】

可令 $\overline{abc}$ 為 3 的倍數，其中 $a\neq 0$。若 $\overline{abc}$ 的每個數碼都是偶數，則可令 $a=2x$、$b=2y$、$c=2z$，且其中 $x<5$、$y<5$、$z<5$，此時

$$\overline{abc}=100a+10b+c=200x+20b+2z=2(100x+10b+z)=2\overline{xyz}\ ,$$

即知 $\overline{xyz}$ 是 3 的倍數，故可推知 $x+y+z$ 也是 3 的倍數。因 1 與 4 之間的差為 3，故 $x=1$ 與 $x=4$ 時，滿足題意的 $\overline{xyz}$ 個數一樣多，故現只需討論 $x=1$、2、3 的情形。

$x=1$ 時，共有 102、111、114、120、123、132、141、144 共 8 個數；

$x=2$ 時，共有 201、204、210、213、222、231、234、240、244 共 9 個數；

$x=3$ 時，共有 300、303、312、321、324、330、333、342 共 8 個數；

$x=4$ 時，共有 402、411、414、420、423、432、441、444 共 8 個數；

因此共 8×2+9+8=33 個數。

【解二】

可知三位數中每個數碼都是偶數的數共 4×5×5=100 個數，且可知其最小數為 200。現將這些數由小到大每 5 個數一組，則因 100=5×20，故可依序分成 20 組，其中第 1、4、8、12、15、16、19 組的數，都會與第 1 組這一組中的某一個數之差恰為 60 的倍數，因此這 7 組裡 3 的倍數之個數與第 1 組相同；第 2、5、6、9、13、17、20 組的數，都會與第 2 組這一組中的某一個數之差恰為 60 的倍數，因此這 7 組裡 3 的倍數之個數與第 1 組相同；第 3、7、10、11、14、18 組的數，

都會與第 3 組這一組中的某一個數之差恰為 60 的倍數，因此這 6 組裡 3 的倍數之個數與第 3 組相同。而第 1 組中僅 204 滿足題意、第 2 組中僅 222、228 滿足題意、第 3 組中僅 240、246 滿足題意，故共有 1×7+2×7+2×6=7+14+12=33 個。

答：33 個

11. 某項射箭比賽中，規定射中箭靶中央圓的部分可得 10 分、射中箭靶中間環狀區域可得 8 分而射中箭靶外環區域可得 5 分，射中其它區域都視為未射中箭靶而得 0 分。某位選手練習時，射中中央圓的次數與射中中間環狀區域的次數相同，且有四分之一的箭未射中箭靶，最後總得分為 99 分。請問他一共射了幾枝箭？

【解】

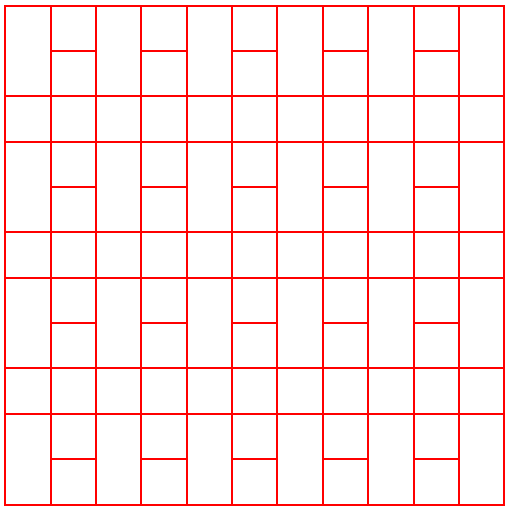
由總得分為 99 分知該選手射中中央圓與射中中間環狀區域的總分，可能為 18、36、54、72 或 90 分，此時射中外環區域所得之分數依序應為 81、63、45、27 或 9 分，當中僅 45 分為 5 的倍數，故知該選手射中外環區域 9 箭而由對應的 54 分知射中中央圓與射中中間環狀區域分別都是 3 箭，因此可知他一共射中箭靶 15 箭，另有 5 箭未射中箭靶，故他一共射了 20 枝箭。

答：20 枝

12. 將 21 片多明諾骨牌沿著格線放置在一個 $n\times n$ 的方格表內，使得每一片多明諾骨牌恰蓋住兩個小方格，且沒有任兩片多明諾互相接觸(即使是角落也不得接觸)。請問 n 的最小值是多少？

【解】

將每一片多明諾骨牌的四周往外延展半個單位長，則成為一個 2×3 矩形，將棋盤依同樣方式延展則成為一個$(n+1)\times(n+1)$的方格表。如此便可知每一種依題意將多明諾骨牌放置在原來的方格表中的情況都會對應到一種將 2×3 矩形放置在新方格表中且沒有接觸的情況。可知$(n+1)\times(n+1)$的棋盤之面積為$(n+1)^2$而 21 片 2×3 矩形的面積為 126，因此$n\geq 11$。由下圖可知 $n=11$ 是成立的，且最多可放置 24 片多明諾骨牌，故最小值為 11。



答：11