注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。**可直接下載而不須申請**。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2013 年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選決賽試題

_____縣市_____國民中學____年級　編號：_____　姓名：_____

作答時間: 二 小 時　　性別: □男 □女

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；若答案為分數，請化為最簡分數)

1. 設 $A=\dfrac{16\times72+17\times73+18\times74+19\times75}{16\times71+17\times72+18\times73+19\times74}\times150$，則 A 的整數部分的值為____。

【參考解法】

$$A=\frac{16\times72+17\times73+18\times74+19\times75}{16\times71+17\times72+18\times73+19\times74}\times150$$

$$=(1+\frac{16+17+18+19}{16\times71+17\times72+18\times73+19\times74})\times150$$

$$=150+\frac{16\times150+17\times150+18\times150+19\times150}{16\times71+17\times72+18\times73+19\times74}$$

$$=150+2+\frac{16\times8+17\times6+18\times4+19\times2}{16\times71+17\times72+18\times73+19\times74}$$

因 $\dfrac{16\times8+17\times6+18\times4+19\times2}{16\times71+17\times72+18\times73+19\times74}<1$，故$A$的整數部分的值為150+2=152。

答：152

2. 將一個數的數碼相加得到另一個數，再將所得的數之數碼相加得到另一個數，直到所得結果為一位數為止，我們稱最後的值為這個數的「數碼值」。則 1 至 2013 之間共有_____個數之數碼值為 1。

【參考解法】

因數碼值為一位數，故考慮模9的情形。若將一位數d視為四位數$\overline{000d}$、二位數$\overline{cd}$視為四位數$\overline{00cd}$、三位數$\overline{bcd}$視為四位數$\overline{0bcd}$，則令四位數$\overline{abcd}$的數碼和$a+b+c+d=\overline{ef}$，可得知

$$\overline{abcd}=1000a+100b+10c+d\equiv a+b+c+d\equiv\overline{ef}\equiv e+f\pmod 9$$

因此每一個數的數碼值與本身在模9之下是相同的，故這是從1至2013是一個由1、2、3、4、5、6、7、8、9依序重複循環出現的數列。而因2013=9×223+4故知1共出現223+1=224次。

答：224

3. 小丁買了一瓶漱口水，上面標示每一次的正確使用量為瓶蓋容量的$\frac{1}{3}$；小丁剛買來時，誤將$\frac{1}{3}$看成$\frac{1}{2}$。在使用$5n$次後才發現錯誤(其中n為正整數)，此時漱口水已剩原來的$\frac{n-1}{n}$。若往後小丁依正確方式使用，一直到用完時又使用$21n+6$次，則該瓶漱口水的體積是漱口水瓶蓋容量的_____倍。

【參考解法】

可令瓶蓋容量為a，則可知該瓶漱口水的體積是$\frac{1}{2}a\times 5n+\frac{1}{3}a\times(21n+6)$且再由使用$5n$次後漱口水已剩原來的$\frac{n-1}{n}$知$(n-1)\times\frac{1}{2}a\times 5n=\frac{1}{3}a\times(21n+6)$。將等式化簡後可得$5n^2-19n-4=0$，即$(n-4)(5n+1)=0$。因$n$為正整數可得知$n=4$，因此漱口水的體積是$\frac{1}{2}a\times 5\times 4+\frac{1}{3}a\times(21\times 4+6)=40a$，即漱口水的體積是漱口水瓶瓶蓋容量的40倍。

答：40

4. 將1、3、5、…、103這52個奇數，以兩個數分為一組，任意分為26組。令每組數中的較大數為a，較小數為b，每組均計算$|a-b|+2a+b$之值，共得26個值，則這26個值的和最大值為_____。

【參考解法】

因$a>b$，故知$|a-b|+2a+b=a-b+2a+b=3a$，因此可推知所求之和的最大值為$3\times(103+101+\ldots+53)=3\times\frac{(103+53)\times 26}{2}=6084$，且此值可發生在將這52個奇數分成(1, 103)、(3, 101)、…、$(n, 104-n)$、…、(51, 53)這26組的情況下。

答：6084

5. 設$S=\{1, 2, 3, \cdots, 2013\}$，若從$S$中最多可選出$k$個整數$a_1$、$a_2$、…、$a_k$，使得這$k$個數中任何兩數之和都不能被它們的差整除，則$k$之值為_____。

【參考解法】

觀察可知，由於連續的二個自然數之和必能被其差1整除、二個連續的奇數或二個連續的偶數之和是偶數，必能被其差2整除，因此在所選的數中，不能有連續的自然數、連續的奇數或連續的偶數；接著再考慮二個差為3的兩個數，此時這二個數不能是3的倍數，否則其和仍是3的倍數，必能被其差3整除，也因此知而可選全是被3除餘1，或全是被3除餘2的數，此時這二種選法中任意的二數之和不是3的倍數，於是不能被其差3的倍數整除，滿足題意。

因$2013=3\times 671$，故知可選1、4、7、…、2011這671個數或2、5、8、…、2012這671個數。

答：671

6. 若數列$\{x_n\}$的首項$x_1>0$，且對任意自然數n，恆有$S_n-\frac{1}{x_n}=x_n-S_n$，其中符號$S_n$表示前$n$項之和，則$S_{2013}^2$之值為_____。

【參考解法】

可知$S_1=x_1$，因此有$x_1-\frac{1}{x_1}=x_1-x_1=0$，即$x_1^2=1$。因$x_1>0$，故可得知$S_1=x_1=1$，即$S_1^2=1$；

而$S_n=x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n$，故

$$x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n-\frac{1}{x_n}=x_n-(1+x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n)$$

$$S_{n-1}+x_n-\frac{1}{x_n}=-(1+x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})=-S_{n-1}\ ,$$

$$2S_{n-1}+x_n=\frac{1}{x_n}$$

$$2S_{n-1}x_n+x_n^2=1$$

故可得知$S_n^2=(S_{n-1}+x_n)^2=S_{n-1}^2+2S_{n-1}x_n+x_n^2=S_{n-1}^2+1$，因此

$$S_{2013}^2=S_{2012}^2+1=S_{2011}^2+2=S_{2010}^2+3=\cdots=S_1^2+2012=2013$$

答：2013

7. 設m與n為相異正整數，其中$m<20$且n不為1，若有一組數對(m,n)使得$|2^m-5^n|=3$，則此一組數對(m,n)為_____。

【參考解法】

當n不為1時，可知5^n的末二位數恆為25，故觀察2^m的末二位數。而除了$2^1=2$外，2的其餘冪次方的末二位數依次為04、08、16、32、64、28、56、12、24、48、96、92、84、68、36、72、44、88、76、52這20個數字循環重複出現，而其中僅第六個數字28與25的差為3，因此可知$m=20k+6+1=20k+7$。因$m<20$，故知$k=0$，因此$m=7$，此時$2^m=2^7=128$，於是可取$n=3$，即$5^n=5^3=125$，便有$|2^7-5^3|=128-125=3$。

答：(7, 3)

8. 我們稱由數碼2、0、1、3所組成的且沒有3個數碼3連續地排在一起的數為「幸運數」例如2013、20133即為幸運數而33303、333321便不是。則六位數的幸運數共有_____個。

【參考解法】

可知共有3×4×4×4×4×4=3072個六位數是由數碼2、0、1、3所組成的，接著觀察數碼3的個數：

若有6個數碼為3，則這6個數碼3必定都連續地排在一起，這樣的數有1個且必不是幸運數；

若只有5個數碼為3，則這5個數碼3必定至少有3個是連續地排在一起，而這樣的數共有2+5×3=17個且都必不是幸運數；

若只有4個數碼為3：

(i) 若這4個數碼3都連續地排在一起，而這樣的數共有3×3+2×3×2=21個且都必不是幸運數；

(ii) 其中只有3個數碼3連續地排在一起，而這樣的數共有3×3+3×3+2×3+3×3+3×3+2×3=48個且都必不是幸運數；

若只有3個數碼為3，且當這3個數碼3連續地排在一起，而這樣的數共有3×3×3+2×3×3×3=81個且都必不是幸運數。

所以六位數的幸運數共有3072－1－17－21－48－81=2904個。

答：2904

9. 已知正整數 a、b 滿足 $(3a+b)^2+6a-2b-1544=0$，則 $a+b$ 之值為_____。

【參考解法】

可知：

$$(3a+b)^2+6a-2b-1544=0$$
$$9a^2+6(b+1)a+b^2-2b-1544=0$$
$$9a^2+6(b+1)a+b^2+2b+1=4b+1545$$
$$9a^2+6(b+1)a+(b+1)^2=4b+1545$$
$$(3a+b+1)^2=4b+1545$$

因 $39^2=1521<1544<40^2=1600$ 且 $4b$ 為偶數，故知 $(3a+b+1)^2\geq 41^2$ 且恆為奇數的平方。

若 $(3a+b+1)^2=4b+1545=41^2=1681$，則

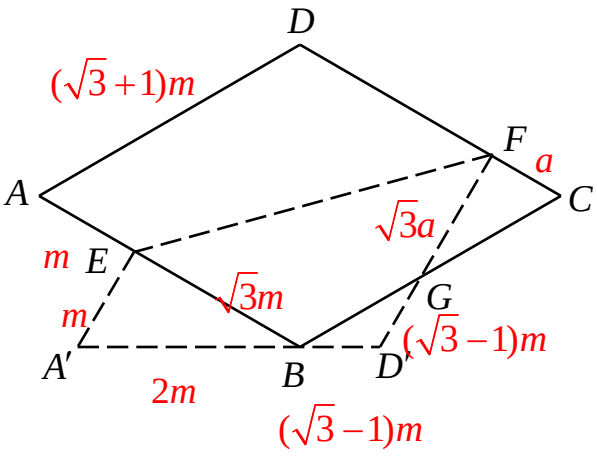
$$b=\frac{1681-1545}{4}=34\text{、}a=\frac{41-1-34}{3}=2\text{。}$$

若 $(3a+b+1)^2=4b+1545=(41+2k)^2=1681+164k+4k^2$，其中 $k\geq 1$，則有 $b=34+41k+k^2>41+2k$，此與 $b=(41+2k)-(3a+1)\leq 41+2k$ 矛盾，故不合。

因此僅有一解 $a=2$、$b=34$，即 $a+b=36$；

答：36

10. 如下圖，已知菱形紙片 $ABCD$ 的 $\angle A=60°$，將紙片摺疊讓 A、D 分別落在點 A'、D' 處，且使得 B 點在線段 $A'D'$，EF 為摺痕，若 $D'F\perp CD$ 時，則 $\frac{CF}{FD}=$_____。



【參考解法】

可知 $\angle A'=\angle A=\angle C=60°$、$\angle D'=\angle D=120°$，

故由 $D'F \perp CD$ 可推得 $\angle CGF = \angle BGD' = \angle GBD' = 30°$，
且 $\angle EBA' = 180° - 120° - 30° = 30°$、$\angle A'EB = 180° - 30° - 60° = 90°$，
因此若令 $CF = a$、$AE = m$，則可推知 $GF = \sqrt{3}a$、$A'E = m$、$BE = \sqrt{3}m$，
所以 $AD = AE + EB = (\sqrt{3}+1)m$、$D'G = BD = A'D - A'B = AD - A'B = (\sqrt{3}-1)m$、
$GF + FC = CD - D'G = AD - D'G = 2m$，

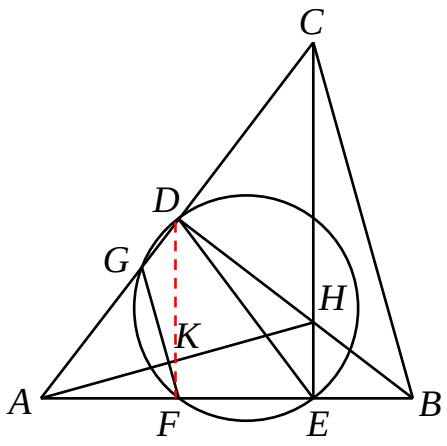
即有 $a + \sqrt{3}a = 2m$，因此 $a = \dfrac{2}{\sqrt{3}+1}m = (\sqrt{3}-1)m$，

故 $\dfrac{CF}{FD} = \dfrac{CF}{FD'} = \dfrac{(\sqrt{3}-1)m}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)m + (\sqrt{3}-1)m} = \dfrac{1}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$。

答：$\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

11.在銳角△ABC 中，已知 AB 邊上的高 CE 與 AC 邊上的高 BD 交於 H，以 DE 為直徑的圓與 AB、AC 分別交於點 F、G，而 FG 與 AH 交於 K；若 BC=25、BD = 20、BE = 7，則 AK 的長為_____。

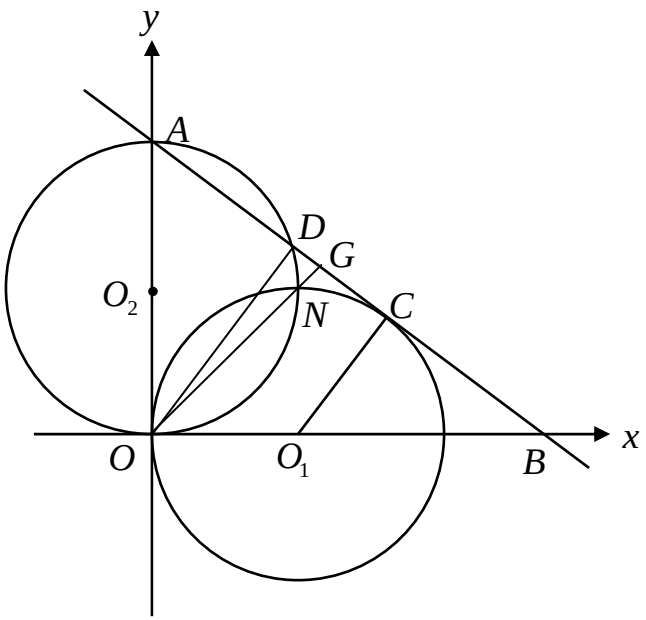
【參考解法】



因 $CE \perp AB$、$BD \perp AC$，故利用勾股定理可知 CE = 24、CD = 15，且也可推知 B、C、D、E 四點共圓，所以 $\angle BCD + \angle BED = 180°$；
而由題意知 D、E、F、G 四點共圓，
因此 $\angle DEF + \angle DGF = 180°$；
再因 $\angle DEF + \angle BEG = 180°$，
故可推得 $\angle BCD + \angle DGF = 180°$，因此 $GF // BC$，
即 $\angle BCD = \angle KGA$、$\angle CBE = \angle KFA$。
因 H 為 BD、CE 交點，故知 H 為垂心，因此 $AH \perp BC$，即 $AK \perp GF$，所以可以進一步來推知△AKF~△CEB、△AKG~△BDC，因此若設 $KF = 7a$，則知 $AF = 25a$、$AK = 24a$、$KG = 18a$、$GA = 30a$，此時可發現 $GF = 7a + 18a = 25a = AF$，即△FGA 為等腰三角形，故可再推知 $AB = BC = 25$、$AE = 18$、$AD = CD = 15$，即知 D 為 AC 中點。連接 DF。因 DE 為圓的直徑，故知 $DF \perp AB$，$DF // CE$。因 D 為 AC 中點，故知 F 為 AE 中點，即 $AF = \dfrac{1}{2}AE = 9$，故得 $a = \dfrac{9}{25}$，所以 $AK = 24a = \dfrac{24 \times 9}{25} = \dfrac{216}{25}$。

答：$\dfrac{216}{25}$

12.如下圖，在直角坐標系中，直線 AB 交 y 軸於點 A，交 x 軸於點 B，其方程為 $y = -\dfrac{3}{4}x + 2$。已知圓 O_1 的圓心是 x 軸上一點，且圓 O_1 與直線 AB 切於點 C，與 y 軸切於原點 O。若以 AO 為直徑作圓 O_2，交直線 AB 於點 D，交圓 O_1 於點 N，連接 ON 並延長交 CD 於點 G，則△ODG 的面積_____。



【參考解法】

由複賽填充第9題可知點A的座標為$(0, 2)$、點B的座標為$(\frac{8}{3}, 0)$且$O_1O = O_1C = 1$。

現由圓O_2的直徑為OA=2知圓O_2的半徑為1，因此圓O_2與圓O_1為大小相等且相交於兩點的二個圓，故直線ON是這二個圓的對稱軸；再因兩圓的圓心分別在x軸、y軸上且都與原點O相切，故可推知ON的直線方程為$x = y$，即點G為$x = y$與$y = -\frac{3}{4}x + 2$的交點，解此方程組可得知點G座標為$(\frac{8}{7}, \frac{8}{7})$。

【方法1】

因OA為圓O_2的直徑，故知$OD \perp AB$，因此可推知$\triangle OAB \sim \triangle DAO$。而利用勾股定理可得知$OA : OB : AB = 3 : 4 : 5$，因此$OD = OA \times \frac{4}{5} = \frac{8}{5}$、$DA = OA \times \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$，

故$\triangle DAO$的面積為$\frac{1}{2} \times \frac{8}{5} \times \frac{6}{5} = \frac{24}{25}$。

而 $BG = \sqrt{(\frac{8}{3} - \frac{8}{7})^2 + (\frac{8}{7})^2} = \sqrt{(\frac{32}{21})^2 + (\frac{8}{7})^2} = \frac{40}{21}$，

故$\triangle OBG$的面積為$\frac{1}{2} \times \frac{40}{21} \times \frac{8}{5} = \frac{32}{21}$。

因此$\triangle ODG$的面積為$\frac{1}{2} \times 2 \times \frac{8}{3} - \frac{24}{25} - \frac{32}{21} = \frac{1400 - 504 - 800}{525} = \frac{96}{525} = \frac{32}{175}$。

【方法2】

因OA為圓O_2的直徑，故知$OD \perp AB$，因此$OD // O_1C$，而再由複賽第 9 題知直線O_1C的方程為$y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$，故直線$OD$的方程為$y = \frac{4}{3}x$，再因已知直線$AB$的方程$y = -\frac{3}{4}x + 2$，故解此方程組可得知$D$座標為$(\frac{24}{25}, \frac{32}{25})$，即可得知

$OD=\sqrt{(\frac{24}{25})^2+(\frac{32}{25})^2}=\frac{8}{5}$、

$DG=\sqrt{(\frac{8}{7}-\frac{24}{25})^2+(\frac{32}{25}-\frac{8}{7})^2}=\sqrt{(\frac{32}{175})^2+(\frac{24}{175})^2}=\frac{8}{35}$，

故$\triangle ODG$的面積為$\frac{1}{2}\times\frac{8}{35}\times\frac{8}{5}=\frac{32}{175}$。

答：$\frac{32}{175}$

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：在試卷上作答，須詳列過程及說明理由)

1. 在一個圓周上寫著若干個非零整數，且每個正數為其兩側相鄰之數的和、而每個負數與其兩側相鄰之數的和為 0。設所有正數的總和為 P，所有負數的總和為 N，試求可能滿足等式$P+aN=0$的 a 值並在圓周上寫出若干個非零整數使這些整數滿足前述條件。

【參考解法 1】

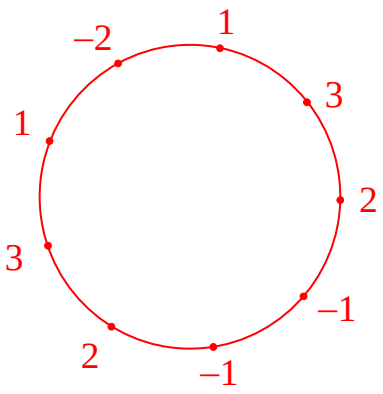
設x_i、y_i、z_i為任意三個相鄰的整數。

若$y_i>0$，則$x_i+z_i=y_i$；若$y_i<0$，則$x_i+z_i=-y_i$。

將這些等式相加，由等式左側可知每個數被加兩次，即總和為$2P+2N$；而等式右側可知每個正數被加一次，每個負數被乘上-1後再加總，可知總和為$P-N$。

因此$2P+2N=P-N$，即$2P+3N=0$，故得$a=3$。

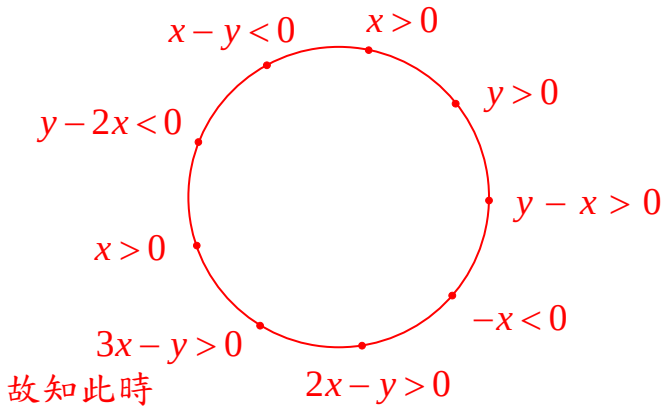
其中一例為如圖所示，將2、3、1、−2、1、3、2、−1、−1共九個數寫在圓周上，這些整數便滿足前述條件。



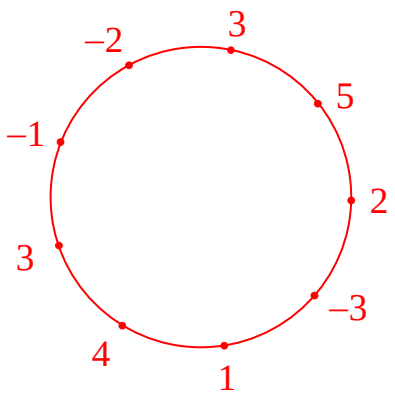
【參考解法 2】

因每一個負數與其兩側相鄰之數的和為0，故可判斷出不可能有連續三個相鄰的數都是負數，即至多連續二個相鄰的數是負數。故考慮x、y二個相鄰的數，不失一般性，可令$x<y$。

(i) 若$0<x<y<2x$，則利用題目所述之規則可得圓上所填的數如下左圖所示：



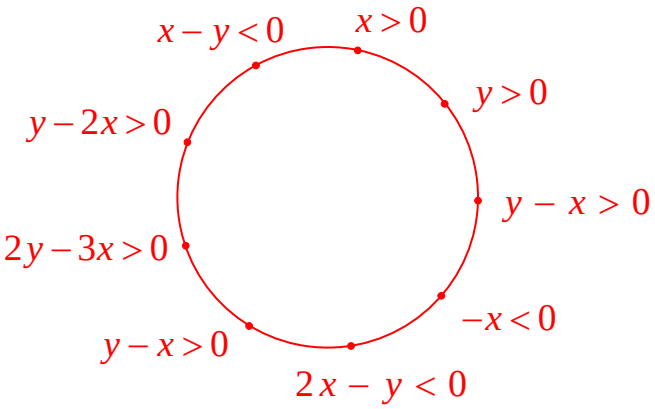
故知此時

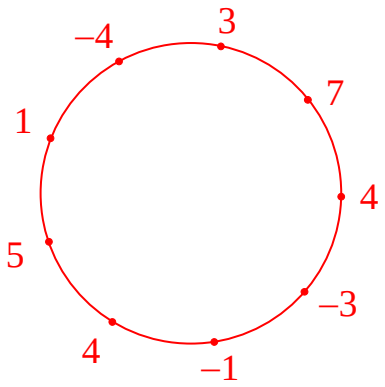


$$P = x + y + (y - x) + (2x - y) + (3x - y) + x = 6x$$
$$N = -x + (y - 2x) + (x - y) = -2x$$

因此 $a = 3$，範例如上右圖所示。

(ii) 若 $0 < x < 2x < y$，則利用題目所述之規則可得圓上所填的數如下左圖所示：



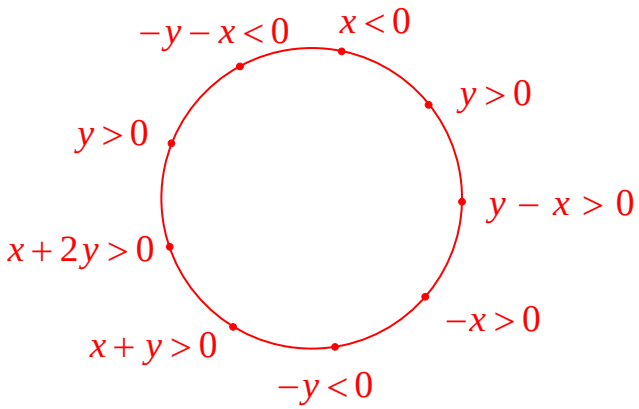


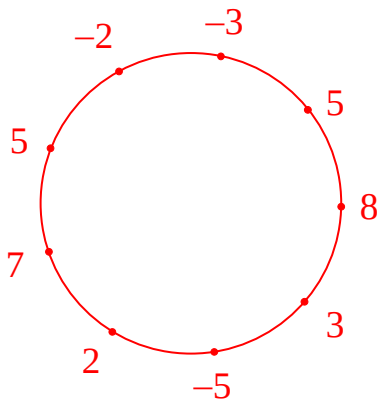
故知此時

$$P = x + y + (y - x) + (y - x) + (2y - 3x) + (y - 2x) = 6y - 6x$$
$$N = -x + (2x - y) + (x - y) = -2y + 2x$$

因此 $a = 3$，範例如上右圖所示。

(iii) 若 $x < 0 < y$ 且 $|x| < y$，則利用題目所述之規則可得圓上所填的數如下左圖所示：



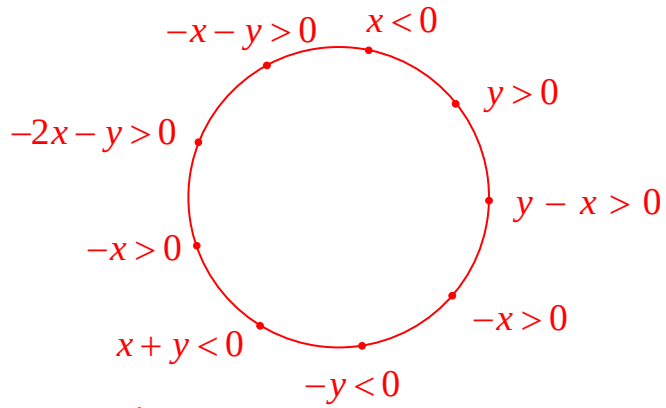


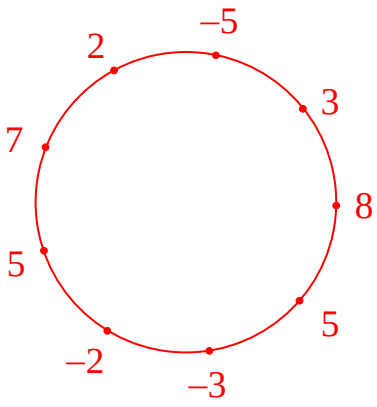
故知此時

$$P = y + (y - x) + (-x) + (x + y) + (x + 2y) + y = 6y$$
$$N = x + (-y) + (-y - x) = -2y$$

因此 $a = 3$，範例如上右圖所示。

(iv) 若 $x < 0 < y$ 且 $|x| > y$，則利用題目所述之規則可得圓上所填的數如下左圖所示：





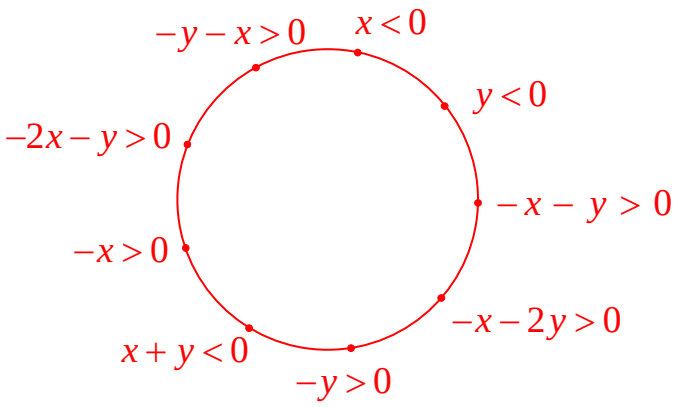
故知此時

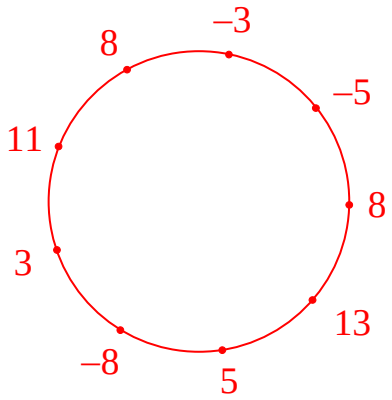
$$P=y+(y-x)+(-x)+(-x)+(-2x-y)+(-x-y)=-6x$$

$$N=x+(-y)+(x+y)=2x$$

因此 $a=3$，範例如上右圖所示。

(v) 若 $x<y<0$，則利用題目所述之規則可得圓上所填的數如下左圖所示：





故知此時

$$P=(-x-y)+(-x-2y)+(-y)+(-x)+(-2x-y)+(-y-x)=-6x-6y$$

$$N=x+y+x+y=2x+2y$$

因此 $a=3$，範例如上右圖所示。

答：3

2. 設 r 為有理數，試求所有 r 的值使得方程 $rx^2+(r+2)x+r-1=0$ 的根全都是整數根。

【參考解法】

若 $r=0$，則原方程變為 $2x-1=0$，即 $x=\frac{1}{2}$，不合；

若 $r\neq 0$，則可令 α、β 為此方程的二整數根，其中 $\alpha<\beta$，則利用根與係數的關係可知 $\alpha+\beta=-\frac{(r+2)}{r}$、$\alpha\beta=\frac{r-1}{r}$。而由 $2\times(\frac{r-1}{r})+\frac{r+2}{r}=3$ 可得

$$2\alpha\beta-(\alpha+\beta)=3$$
$$\alpha(2\beta-1)-\beta=3$$
$$2\alpha(2\beta-1)-2\beta=6$$
$$2\alpha(2\beta-1)-(2\beta-1)=7$$
$$(2\alpha-1)(2\beta-1)=7$$

再由$\alpha<\beta$可進一步推得

$$\begin{cases}2\alpha-1=1\\2\beta-1=7\end{cases}\text{或}\begin{cases}2\alpha-1=-7\\2\beta-1=-1\end{cases}$$

即$(\alpha,\beta)=(1,4)$或$(-3,0)$。

當$(\alpha,\beta)=(1,4)$，則由$\alpha\beta=\frac{r-1}{r}$知$\frac{r-1}{r}=4$，此即$r=-\frac{1}{3}$；

當$(\alpha,\beta)=(-3,0)$，則由$\alpha\beta=\frac{r-1}{r}$知$\frac{r-1}{r}=0$，此即$r=1$。

答：1、$-\frac{1}{3}$

3. $\triangle ABC$的BC邊上取一點K、$\triangle ABK$、$\triangle ACK$的內切圓分別與BC切於M、N點，求證：$BM\times CN>KM\times KN$。

【參考解法】

如圖，令D、E分別為AK、AB與圓O_1的切點。因AK、BK、AB為圓O_1的切線，故知$BM=BE$、$AE=AD$、$KD=KM$，故可得　$BM=BK-MK=BK-DK$、

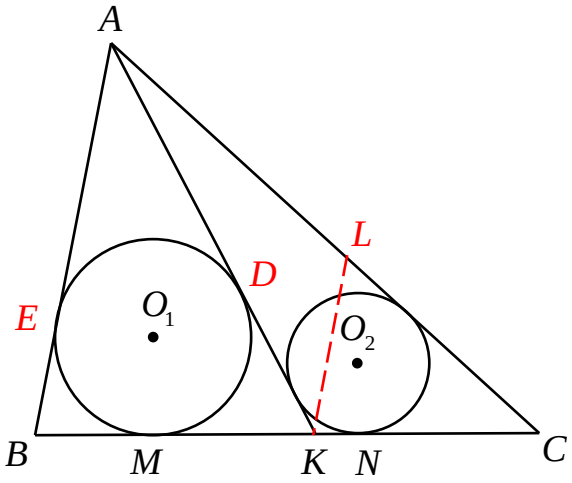
$BE=AB-AE=AB-AD$，

所以　$BM+BE$

$=AB+BK-(AD+KD$

$=AB+BK-AK$，

即$BM=\frac{AB+BK-AK}{2}$。利用相同手法



可推知$KM=\frac{BK+AK-AB}{2}$、$KN=\frac{CK+AK-AC}{2}$、$CN=\frac{CK+AC-AK}{2}$。

因此

$$4(BM\times CN-KM\times KN)$$
$$=(AB+BK-AK)(CK+AC-AK)-(BK+AK-AB)(CK+AK-AC)$$
$$=2\times AB\times CK+2\times BK\times AC-2\times BK\times AK-2\times CK\times AK$$
$$=2(AB\times CK+BK\times AC-BC\times AK)$$

接著過K點作$KL//AB$交AC於L，則可知$\frac{KL}{AB}=\frac{KC}{BC}$、$\frac{AL}{AC}=\frac{BK}{BC}$，即

$$AB\times CK=KL\times BC\text{、}BK\times AC=BC\times AL$$

故知

$$\begin{aligned} AB\times CK+BK\times AC-BC\times AK &= KL\times BC+BC\times AL-BC\times AK \\ &= BC(KL+AL-AK) \\ &> 0 \end{aligned}$$

此時即可推得 $BM\times CN-KM\times KN>0$，故 $BM\times CN>KM\times KN$ 。