注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。**可直接下載而不須申請**。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2010 年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選複賽

個人賽試題

編 號:_____ **縣市：**_____ **校 名:**_____

姓 名:_____ **性別:**□ 男 □ 女

作答時間: 二 小 時

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請將答案直接填入各題預留空白處，不需列出計算過程)

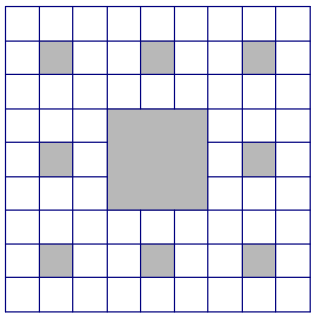
1. 若一數列滿足 $a_1=\frac{1}{2}$，$a_{n+1}=\frac{3a_n}{a_n+3}$，其中 $n \geq 1$，則 a_{100}=_____。 Ans: 1/35

2. 設 n 為正整數，如果 n 正好等於它的數字和的 20 倍，則滿足這樣條件的所有 n 值之總和為_____。 Ans: 180

3. 已知每一隻蜈蚣有一個頭及 46 隻腳，如果蜈蚣與三個頭的龍同在一個籠中，已知它們共有 37 個頭和 1042 隻腳，假設每一隻三頭龍可能會有 $n_1,n_2,...,n_k$ 隻腳，則 $n_1+n_2+...+n_k$ =_____。 Ans: 267

4. 已知可以把 1111111122222222 分解成兩個連續的正整數乘積，則這兩個正整數的和是_____。 Ans: 66666667

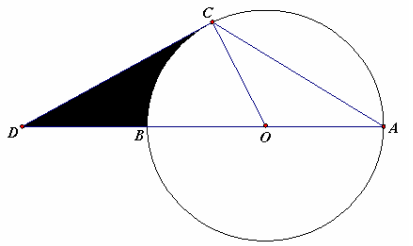
5. 將邊長為 1 個單位長的正方形依下列方式挖去一些小正方形，其步驟如下：第 1 步驟：將邊長為 1 的正方形分成 9 個相等大小的小正方形，去掉中間的小正方形。第 2 步驟：再將剩下的 8 個小正方形每一個都再分成 9 個相等大小的次小正方形，再去掉每一個中間的次小正方形。完成第 2 步驟後的圖形如右，其中暗色部分表示挖去的部分。依此規則一直進行下去，試求完成第 5 步驟後，此時被挖去部分的總面積為_____。



Ans: 26281/59049

6. 如圖，$\overline{AB}$ 是圓 O 的直徑，C 點是圓周上一點。今過 C 點作圓 O 的切線交 $\overline{AB}$ 的延長線於 D 點，若 $\overline{AC}=10$ 且 $\angle OAC=\angle OCA=30^\circ$，則黑色部分面積之值為_____。.

Ans: $=\frac{50\sqrt{3}}{3}-\frac{50\pi}{9}$



7. 某班學生人數 50 人，按座號排成一列，老師要求他們每次都從一號開始由一至五報數，如”一、二、三、四、五、一、二、三、四、五”，所有報到”五”的人出列，如此繼續下去直到最後剩下四人為止，那麼最後出列那個人的座號是_____。

Ans: 42 號

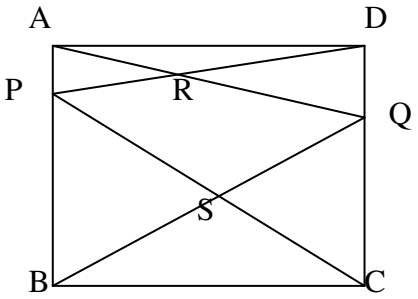
8. 設 $a>0, b>0$ (b 為正整數), $0<c<1$，已知 $a-b-c=0$, 且 $a^2+c^2=66$，則 $a+b+c=$_____。

Ans: $8+2\sqrt{17}$

9. 若 $R=\dfrac{1}{\frac{1}{429}+\frac{1}{430}+\frac{1}{431}+\cdots+\frac{1}{499}+\frac{1}{500}}$，則 R 之小數點後第一位數字為_____。

Ans: 4

10. 如圖，設 $ABCD$ 為邊長為 6 的正方形，在 $\overline{AB}$ 上取一點 P，使得 $\overline{AP}=1$；在 $\overline{CD}$ 上取一點 Q，使得 $\overline{DQ}=2$，連接 $\overline{AQ}$ 及 $\overline{PD}$ 交於 R，連接 $\overline{BQ}$ 及 $\overline{PC}$ 交於 S，則四邊形 $PRQS$ 的面積為_____。

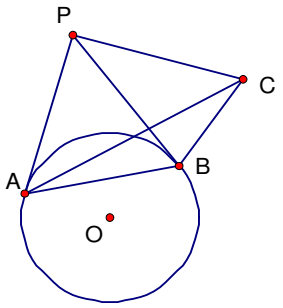


Ans: 26/3

11. 設盒中分別有標示三正整數 a、b、c 的三個號碼球，且 $a<b<c$；甲、乙、丙三位小朋友玩取球遊戲，第一次他們依序各取不同的一個球並記下球的號碼後，將此三個球放回盒中，第二次做法與第一次相同，經過若干次後，甲、乙、丙他們三人所得的號碼總和分別為 23、15 及 13，已知乙在最後一次取的球其號碼為 c，則甲在第二次所取球的號碼及丙在第二次所取球的號碼它們的乘積為_____(答案需以正整數表示，不可以 a、b、c 表示)。

Ans: 45

12. 如圖，已知圓 O 分別和線段 PA、PB 相切於 A、B 兩點，若 PC 滿足 $AB\times PB-AC\times PC=AB\times PC-AC\times PB$，且 $AP\perp PC$，$\angle PAB=2\angle BPC$，則 $\angle ACB$ 的度數為_____。

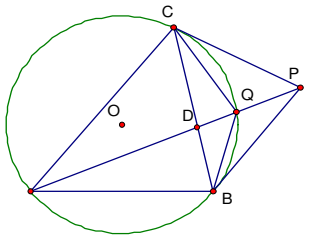


Ans: 30^o

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：在答案卷上請依題號作答，須詳列過程及說明理由)

1. 如圖，過△ABC 的頂點 B、C 分別作其外接圓的切線 BP、CP 交於點 P，連結 AP 分別交△ABC 的邊 BC 及其外接圓於點 D、Q，求證：$BD\times CQ^2 = CD\times BQ^2$



【參考解答】

由 $\angle BAD = \angle BCQ$ 及 $\angle ADB = \angle CDQ$

故 $\Delta ADB \sim \Delta CDQ \Rightarrow \dfrac{DQ}{BD} = \dfrac{CQ}{AB}$.....(1)

$\because \angle CAD = \angle QBD \,\&\, \angle ADC = \angle BDQ$

$\therefore \Delta ACD \sim \Delta BQD \Rightarrow \dfrac{CD}{DQ} = \dfrac{CA}{BQ}$.....(2)

$(1)\times(2) \Rightarrow \dfrac{CD}{BD} = \dfrac{CQ}{AB}\times\dfrac{CA}{BQ}$.....(3)

又由於 BP、CP 分別為過 B、C 點而與圓 0 相切的線段，

故 $\Delta PAB \sim \Delta PBQ$ 及 $\Delta PAC \sim \Delta PCQ$

獲得 $\dfrac{PB}{PA} = \dfrac{BQ}{AB}$ 及 $\dfrac{PC}{PA} = \dfrac{CQ}{AC}$;由於 $PC=PB \Rightarrow \dfrac{BQ}{AB} = \dfrac{CQ}{AC}$

而得 $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{CQ}{BQ}$ .....(4)

將(4)代入(3)可得 $\dfrac{CD}{BD} = \dfrac{CQ}{BQ}\times\dfrac{CQ}{BQ} = \dfrac{CQ^2}{BQ^2}$　　而證得 $BD\times CQ^2 = CD\times BQ^2$

2. 設 a、b 為二個正整數，a 與 b 的差為 60，已知 a 與 b 的正平方根之和亦為某正整數的平方根，且此平方根是一個無理數，試求出 a、b 的所有可能解。

【參考解答】

設 a、b 的正平方根分別為 $m\sqrt{x}$ 、 $n\sqrt{x}$ ，且 $a>b$ （即 $m>n$ ）

$a-b = m^2x - n^2x = (m^2-n^2)x = 60 = 2^2\times 3\times 5$

(1) $\sqrt{x} = \sqrt{2}$ ， $\Rightarrow 2m^2 - 2n^2 = 60$ ， $(m+n)(m-n) = 30$

$m+n$	30	15	10	6
$m-n$	1	2	3	5

（皆不合）

(2) $\sqrt{x} = \sqrt{3}$ ， $\Rightarrow 3m^2 - 3n^2 = 60$ ， $(m+n)(m-n) = 20$

$m+n$	20	10	5
$m-n$	1	2	4

$\Rightarrow (m,n) = (6,4)$（餘皆不合）

(3) $\sqrt{x} = \sqrt{5}$ ， $\Rightarrow 5m^2 - 5n^2 = 60$ ， $(m+n)(m-n) = 12$

$m+n$	12	6	4
$m-n$	1	2	3

$\Rightarrow (m,n) = (4,2)$（餘皆不合）

$\therefore (a,b)=(3m^2,3n^2)=(108,48)$ 或 $(a,b)=(5m^2,5n^2)=(80,20)$ 。

3. 對於僅由數字 1 構成的數，如 1111111111111111 是 17 的倍數，

(i) 試證一定有這種數是 2011 的倍數。

(ii) 若 n 個 1 的數 $\underbrace{111...1}_{n個}$ 是 2011 的倍數，試證 $\underbrace{222...2}_{n+1個}\underbrace{000...0}_{n+1個}\underbrace{111...1}_{n+1個}\underbrace{111...1}_{n+1個}$ 也是 2011 的倍數。

【參考解答】

(i) 以 $\overline{n}$ 代表由 n 個 1 構成的數，例 $\overline{3}$ 代表 111。

對於不同數 $\overline{n}>\overline{m}$ ，若除以 2011 的餘數相同，則 $(\overline{n}-\overline{m})$ 爲 2011 的倍數；$(\overline{n}-\overline{m})$非 0 部分必是由連續的 1 所構成且是 2011 的倍數。

因爲除以 2011 的餘數最多有 2011 個，由(鴿籠原理)此可知一定有不同數 $\overline{n}>\overline{m}$ 其餘數相同，或餘數爲 0。因此必有這種數是 2011 的倍數。

(ii) 令 $s=\underbrace{222...2}_{n+1個}\underbrace{000...0}_{n+1個}\underbrace{111...1}_{n+1個}\underbrace{111...1}_{n+1個}=\underbrace{111...1}_{n+1個}(2\times10^{3n+3}+0\times10^{2n+2}+1\times10^{n+1}+1)$

令 $a=\underbrace{111...1}_{n個}$ ，a 是 2011 的倍數。

$\underbrace{111...1}_{n+1個}=10a+1$。$10^n=9a+1$。

$s=(10a+1)(2\times10^{3n+3}+0\times10^{2n+2}+1\times10^{n+1}+1)$

$=(20a\times10^{3n+3}+0\times10^{2n+2}+10a\times10^{n+1}+10a)+(2\times10^{3n+3}+0\times10^{2n+2}+1\times10^{n+1}+1)$

$=a(20\times10^{3n+3}+0\times10^{2n+2}+10\times10^{n+1}+10)+(2000\times10^{3n}+0\times10^{2n}+10\times10^{n}+1)$

$=a\times p+[2000\times(9a+1)^3+0\times(9a+1)^2+10\times(9a+1)+1]$

$=a\times p+[a\times q+2000+10+1]=a\times(p+q)+2011$

s 是 2011 的倍數。