注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。**可直接下載而不須申請**。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

「2010 年青少年數學國際城市邀請賽」

參賽代表遴選初選

個人數學競賽試題

編 號:_____ 校 名:_____ 姓 名:_____

作答時間: 二 小 時

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

1. 9^{2010} 被 11 除的餘數為_____。

【參考解法】

由費馬小定理可知 $9^{10}\equiv 1(\mathrm{mod}11)$，故 $9^{2010}\equiv (9^{10})^{201}\equiv 1^{201}\equiv 1(\mathrm{mod}11)$。

答：1

2. 計算 $1^3+2^3+3^3+4^3+.....+99^3+100^3=$_____。

【參考解法】

$$1^3+2^3+3^3+4^3+.....+99^3+100^3=\left(\frac{100\times(100+1)}{2}\right)^2=25502500。$$

答：25502500

3. 已知 p、q、r 和 s 為不等於 0 的實數，若 r、s 是方程式 $x^2+px+q=0$ 的兩根，而 p、q 是方程式 $x^2+rx+s=0$ 的兩根，則 $p+q+r+s$ 的值是_____。

【參考解法】

由根與係數的關係知 $\begin{cases} r+s=-p \\ p+q=-r \end{cases}$，故 $-p=r+s=-(p+q)+s=-p-q+s$，即 $s=q$，再利用根與係數的關係知 $\begin{cases} rs=q\Rightarrow r=1 \\ pq=s\Rightarrow p=1 \end{cases}$，故 $p+q+r+s=-r-p=-2$。

答：–2

4. 有 8 人參加某一次棋賽，比賽採單循環賽，即每人都與其它人各恰賽 1 場。贏家得 2 分、平手各得 1 分，輸家得 0 分。棋賽結束後，結果每個人所得的分數均不相同，且第二名的得分等於最後四名得分的總和，第三名的得分為 11 分。則第四名的得分是_____分。

【參考解法】

可觀察知 8 人的分數總和應為 56 分。

由第三名為 11 分可知第一名與第二名的分數應為 14、13、12 中的兩個。

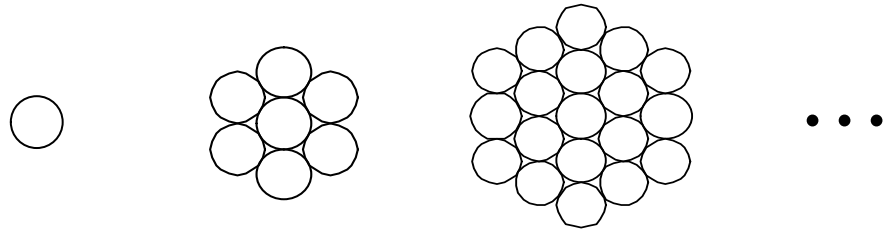
若 14 分為第一名、12 分為第二名，則第一名七場全獲勝、第二名勝六場敗一場，故第二名必敗給第一名其餘皆取勝，故第三名至少敗二場，但由第三名的 11 分知第三名至多敗一場，矛盾，故不合。

若 13 分為第二名，則第一名得 14 分，即第一名七場全獲勝、第二名必有一場平手且其餘六場皆獲勝，矛盾，故不合。

故 13 分為第一名，即第二名得 12 分，再由第三名的 11 分及第二名的得分等於最後四名得分的總和知第四名分數為 $56-13-12-11-12=8$ 分。

答：8 分

5. 如圖所示，以下為大小相同的圓所構成的造形，每一堆的圓皆緊密相切。則第十堆圓的個數有_____個。



第一堆　　第二堆　　第三堆

【參考解法】

令第 n 堆的個數為 a_n。則可觀察知 $a_n=1+6\times1+6\times2+6\times3+\cdots+6(n-1)$。故所求為 $a_{10}=1+6\times1+6\times2+\cdots+6\times9=271$。

答：271

6. 已知 a、b、c 均為實數$(a\ge b\ge c)$，且滿足 $a+b+c=10$ 及 $abc-23a=40$，則 $|a|+|b|+|c|$ 之最小值為_____。

【參考解法】

因 $a+b+c=10>0$ 且 $a\ge b\ge c$，故 a 不為 0。再由 $b+c=10-a$ 及 $abc-23a=40$ 可知 $bc=23+\frac{40}{a}$，故利用根與係數的關係知 b 與 c 為 $x^2-(10-a)x+(23+\frac{40}{a})=0$ 的兩根，換言之判別式 $(10-a)^2-4\times(23+\frac{40}{a})\ge0$，即

$$a^3-20a^2+8a-160\ge0$$

$$(a^2+8)(a-20)\ge0$$

故知 $a\ge20$，即 $|a|\ge20$。再因 $a+b+c=10$，故 $b+c\le-10$，因此 $|b+c|\ge10$，再由三角不等式知 $|b|+|c|\ge|b+c|\ge10$，故 $|a|+|b|+|c|\ge30$。

答：30

7. 設 n 是正整數且 $100\le n\le400$，若 $\frac{n^3-99}{n^3-92}$ 不是最簡分數，則正整數 n 的可能值有_____個。

【參考解法】

令 $n^3-99=A$，則 $\frac{n^3-99}{n^3-92}=\frac{A}{A+7}$，故由 $\frac{A}{A+7}$ 不是最簡分數可知 A 必有因數 7，即 $n^3-99\equiv n^3-1\equiv 0(\text{mod}\,7)$，故 $n\equiv 1、2、4(\text{mod}\,7)$。

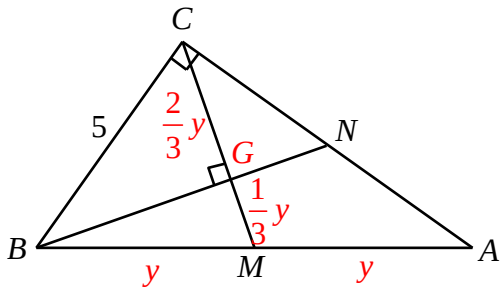
因 $7\times 14+2=100\le n\le 400=7\times 57+1$，故 $n\equiv 1(\text{mod}\,7)$ 的 n 可能值有 43 個、$n\equiv 2(\text{mod}\,7)$ 的 n 可能值有 43 個、$n\equiv 4(\text{mod}\,7)$ 的 n 可能值有 43 個，共 129 個。

答：129 個

8. 如下圖△ABC 是直角三角形且角 C 為直角，已知 AC 邊的中線 BN 與 AB 邊的中線 CM 互相垂直且 BC=5，則 BN 的長度為 _____。

【參考解法】

如圖，令 $BM=AM=y$，因△ABC 是直角三角形且角 C 為直角故可知 $CM=y$。



因 AC 邊的中線 BN 與 AB 邊的中線 CM 的交點 G 為重心，因此 $CG=\frac{2}{3}AM=\frac{2}{3}y$、$GM=\frac{1}{3}AM=\frac{1}{3}y$、$BN=\frac{3}{2}BG$。

利用勾股定理可知 $BG^2=BC^2-CG^2=BM^2-GM^2$，故可得

$$5^2-(\frac{2}{3}y)^2=y^2-(\frac{1}{3}y)^2$$

$$y^2=\frac{75}{4}$$

故 $BG=\sqrt{\frac{8}{9}y^2}=\frac{5\sqrt{6}}{3}$，因此 $BN=\frac{5\sqrt{6}}{2}$

答：$\frac{5\sqrt{6}}{2}$

9. 已知 a、b、c、d、e 為五個彼此相異的整數，且滿足

$$(4-a)(4-b)(4-c)(4-d)(4-e)=12，$$

則 $a+b+c+d+e$=_____。

【參考解法】

因 a、b、c、d、e 為五個彼此相異的整數，故 $4-a$、$4-b$、$4-c$、$4-d$、$4-e$ 也是五個彼此相異的整數。因 $12=2^2\times 3$，故 12 寫成五個彼此相異的整數的乘積僅可能為 $(-1)\times 1\times(-2)\times 2\times 3$，故 $(4-a)+(4-b)+(4-c)+(4-d)+(4-e)=3$，即 $a+b+c+d+e$=17。

答：17

10. 設 $N=1+11+111+\cdots+\underbrace{111\cdots 11}_{2010\text{個「1」}}$，則 N 之值的末五位數是_____。

【參考解法】

$N=1+11+111+\cdots+\underbrace{111\cdots11}_{2010個「1」}$

$=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{2010個}+\underbrace{10+10+10+\cdots+10}_{2009個}+\underbrace{100+100+100+\cdots+100}_{2008個}+\cdots+\underbrace{1000\cdots0}_{2009個「0」}$

故 N 之值的末五位數即為 2010+2009×10+2008×100+2007×1000+2006×10000 的末五位數，即是 89900。

答：89900

11. 一個圓的直徑兩端分別已經填有數 2 與數 3，每次操作都把圓上每段弧兩端上的數之平均寫在此段弧的中點上。則經過十次操作後，圓周上的所有數之總和為_____。

【參考解法】

令第 n 次操作的和為 a_n。則可觀察知 $a_n=5\times2^n$。故所求為 $a_n=5\times2^{10}=5120$。

答：5120

12. 下圖中，四邊形 $ABCD$ 是一個邊長為 30 的正方形。已知 E 在 CD 邊上，F 在 BC 邊上且 $CF=CE=x$，若四邊形 $FCEG$ 的面積=75，則 x 之值為_____。

【參考解法】

連接 BD、CG，則令△BGF 的面積與△DGE 的面積為 a，則可知△BGD 的面積為 $30\times30\div2-75-2a=375-2a$。由面積比可知 $a:\frac{75}{2}=375-2a:a+\frac{75}{2}$，即

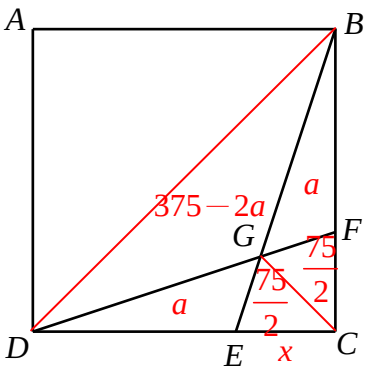
$$2a:75=750-4a:2a+75$$

故可得

$$4a^2+450a-75\times750=0$$

$$(a-75)(4a+750)=0$$

所以 $a=75$，即 $DE:EC=75:\frac{75}{2}=2:1$，故 $x=10$。



答：10

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：在答案卷上請依題號作答，須詳列過程及說明理由)

1. 設 $n!=1\times2\times3\times\cdots\times n$，若將 2010 分為十二個正整數 a_1、a_2、…、a_{12} 之和，且使 $(a_1!)\times(a_2!)\times\ldots\times(a_{12}!)$ 最小，其中 $a_1\le a_2\le\cdots\le a_{12}$，試問此時 a_1、a_2、…、a_{12} 之值為何?

【參考解法】

因 $2010=12\times167+6$，可令

$a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=a_6=167$、$a_7=a_8=a_9=a_{10}=a_{11}=a_{12}=167+1=168$，

則 $(a_1!)\times(a_2!)\times\cdots\times(a_{12}!)=(167!)^6\times(168!)^6$。

若有另一組 12 個正整數 b_1、b_2、…、b_{12} 也滿足條件，則可令 $k_i=b_i-a_i$，且知 $k_1+k_2+\cdots+k_{12}=0$。

若 $k_i>0$，則 $b_i!=(a_i!)\times(a_i+1)\times(a_i+2)\times\cdots\times(a_i+k_i)$；

若 $k_i<0$，則 $b_i!=(a_i!)\times\frac{1}{(a_i-1)}\times\frac{1}{(a_i-2)}\times\cdots\times\frac{1}{(a_i-k_i)}$；

因 $a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=a_6=167$、$a_7=a_8=a_9=a_{10}=a_{11}=a_{12}=167+1=168$，故可知 $a_i+m\geq a_j-n$，即 $\frac{a_i+m}{a_j-n}\geq 1$。

因此可知 $(b_1!)\times(b_2!)\times\cdots\times(b_{12}!)\geq(a_1!)\times(a_2!)\times\cdots\times(a_{12}!)=(167!)^6\times(168!)^6$，

故 $(a_1!)\times(a_2!)\times\cdots\times(a_{12}!)=(167!)^6\times(168!)^6$ 是最小的。

答：$a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=a_6=167$、$a_7=a_8=a_9=a_{10}=a_{11}=a_{12}=167+1=168$

(只給出正確答案未證明最小，給 10 分)

2. 已知四邊形 $ABCD$ 為正方形，點 F 在 $\overline{CD}$ 上，點 E 在 $\overline{BC}$ 上，使得 $\angle EAF=45°$，由 A 作 $\overline{EF}$ 之垂線，垂足為點 H，試證 $\overline{BE}=\overline{EH}$。

【參考解法】

在 BC 的沿長線上取一點 G 使得 $BG=DF$。

連接 AG，則因 $BG=DF$、

$AB=AD$ 且

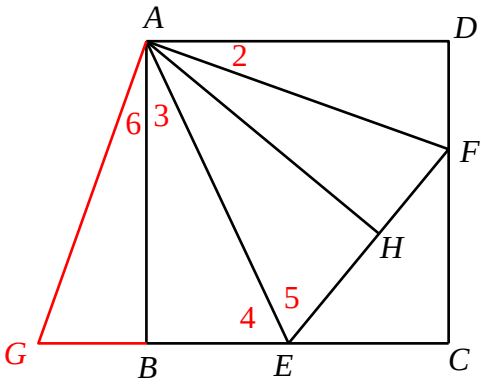
$\angle ABG=\angle ADF=90°$

可知 $\triangle ABG\cong\triangle ADF$，故 $\angle 2=\angle 6$ 且 $AF=AG$。

因為 $\angle EAF=45°$，故 $\angle 2+\angle 3=90°-45°=45°$，

(給 5 分) 即 $\angle 6+\angle 3=45°$，換言之，

$\angle GAE=\angle EAF$。



再因 $AE=AE$，故可知 $\triangle AEG\cong\triangle AEF$，因此有 $\angle 4=\angle 5$，所以再由 $AH\perp EF$、$AE=AE$ 可推得 $\triangle AEB\cong\triangle AEH$，故 $BE=EH$。

3. 如果從 1、4、7、10、…、94、97 這三十三個數中任取 k 個，可保證其中至少有二個數的和是 41，試問 k 值最小應為多少?。

【參考解法】

先考慮小於 41 的數中，因 41=1+40=4+37=7+34=10+31=13+28=16+25=19+22，故在數對(1, 40)、(4, 37)、(7, 34)、(10, 31)、(13, 28)、(16, 25)、(19, 22)中必須各取一個數後再從其餘的數任取一個，此時取了 8 個數(給 10 分)；而大於 41 的數必須全部取出，故需再取 19 個數，因此至少需取 8+19=27 個數。

答：27