注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。**可直接下載而不須申請**。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2009 年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選決賽

個人數學競賽試題

編號:_____校名:_____ 國中 姓名:_____ 性別:□男; □女

作答時間: 二 小 時

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請將答案直接填入各題預留空白處，不須列出計算過程。)

1. 已知 n 為正整數，且 $3n$ 恰有 5 個正因數，則 $10n$ 的正因數個數共有_____個。

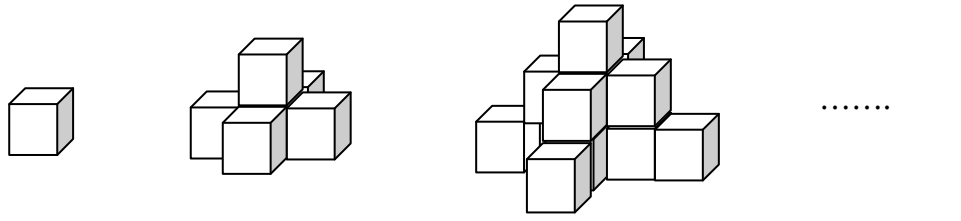
2. 已知 a, b 為正整數且滿足 $\begin{cases} ab+a+b=51 \\ a^3b+ab^3=5508 \end{cases}$，則 $a^2+b^2=$_____。

3. $\sqrt{1+\frac{4\times 2^2}{(2^2-1)^2}}+\sqrt{1+\frac{4\times 3^2}{(3^2-1)^2}}+\sqrt{1+\frac{4\times 4^2}{(4^2-1)^2}}+\cdots\cdots+\sqrt{1+\frac{4\times 20^2}{(20^2-1)^2}}=$_____。

4. 已知正整數 n 的四次方恰有六個數碼，而這六個數碼包含 0, 1, 4, 6, 7, 9 各一個，則該正整數 n = _____。

5. 已知 n 為正整數，如果 n 正好等於它的數碼和的 30 倍，則滿足這樣條件的 n 之最小值為_____。

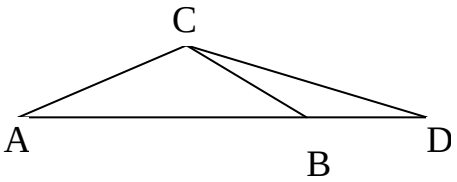
6. 以下圖(1)是由一個正立方體構造而成的；圖(2)是由 6 個相同的正立方體構造而成的；圖(3)是由 15 個相同的立方體構造而成的。按照此規律繼續構造下去，則在圖(100)所構造的形體中，正立方體的數量總共有_____個。



圖(1)　圖(2)　圖(3)　…… 圖(100)

(翻面繼續作答)

7. 在下圖$\triangle ABC$中，$\overline{AB}=\frac{5}{2}$，$\overline{AC}=\sqrt{3}$，$\angle CAD=\angle DCB=30^0$，則$\triangle DCB$之面積為_____。



8. 已知$f(x)=\frac{3^x}{3^x+\sqrt{3}}$，則$f(\frac{1}{2009})+f(\frac{2}{2009})+f(\frac{3}{2009})+...+f(\frac{2008}{2009})=$_____。

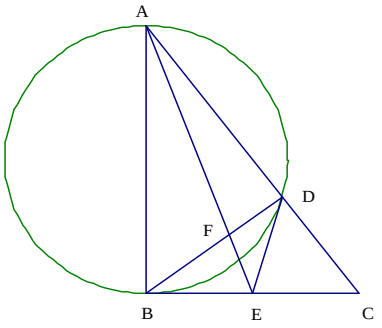
9. 所有比 1800 小且與 1800 互質的正整數之總和是_____。

10. 在右圖方格表的每個小方格內，按照圖形所示的方式依序將正整數填入；例如將 1 填入第一行第一列的小方格中；將 2 填入第二行第一列的小方格中；將 3 填入第一行第二列的小方格中；…；將 20 填入第二行第五列的小方格中。則 2009 填入的小方格是第_____第_____列。

5	11	20				
4	10	12	19			
3	4	9	13	18		
2	3	5	8	14	17	
1	1	2	6	7	15	16
	1	2	3	4	5	6

11. 設 p 為質數，若 $p+10$ 與 $p+14$ 也都是質數，則滿足這些條件的質數 p 總共有_____個。

12. 三角形 ABC 為一直角三角形，$\angle ABC=90^\circ$，線段 AB 長為 10，以線段 AB 為直徑畫一圓交斜邊 AC 於 D 點，線段 AD 長為 8。過 D 點作圓的切線交線段 BC 於 E 點。線段 AE 與線段 BD 相交於 F 點，則線段 FD 之長為_____。



第二部分：計算證明，每題 20 分,共 60 分

(注意：請在本試卷正反面空白處依題號作答，須詳列計算過程及說明理由)

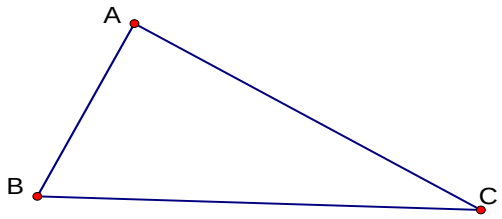
1. 在一個 12×13 的方格表中，沿著任意兩條水平的格線與兩條鉛直的格線圍出一個四邊形，請問所有可能這樣圍出來的四邊形面積之總和為多少？

(例如：在一個 2×3 的方格表中，可圍出 1×1 的四邊形六個；可圍出 1×2 的四邊形四個；可圍出 2×1 的四邊形三個；可圍出 1×3 的四邊形二個；可圍出 2×2 的四邊形二個；可圍出 2×3 的四邊形一個。則這些可能圍出來的四邊形面積之總和為 6×1×1＋4×1×2＋3×2×1＋2×1×3＋2×2×2＋1×2×3=40。)

2. 在 ΔABC 中，已知 $\angle ABC = 2\angle ACB$，試證：

(1) $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AB}\cdot\overline{BC}$；

(2) $\overline{AB} + \overline{BC} < 2\overline{AC}$。



(翻面繼續作答)

3. 用鐵絲構成一個稜邊長為 1 的正立方體，請問在此鐵絲正立方體上最多可以放置多少隻螞蟻，使得任兩隻螞蟻之間沿著鐵絲爬行的距離都大於 1？