注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。**可直接下載而不須申請**。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

目　錄

第九章　數的開方 …… 1
附錄 平方根的筆算求法 …… 28

第十章　二次根式 …… 33

第十一章　一元二次方程 …… 67
一　一元二次方程 …… 67
二　一元二次方程根與係數的關係 …… 87
三　可化為一元二次方程的方程 …… 95
四　簡單二元二次方程組 …… 108

第十二章　指數 …… 127

第十三章　常用對數 …… 153

第十四章　函數及其圖形 …… 171
一　直角座標系 …… 171
二　函數 …… 180
三　正比例函數與反比例函數 …… 188
四　一次函數的圖形與性質 …… 196
五　二次函數的圖形與性質 …… 203
六　一元一次不等式組與一元二次不等式 …… 212

第十五章　解三角函數 …… 229
一　三角函數 …… 229
二　解直角三角形 …… 241
三　解斜三角形 …… 252

第十六章　統計初步..... 275

附　錄　初中代數總複習參考題..... 306

說　明

一、　本書包括：數的開方、二次根式、一元二次方程、指數、常用對數、函數及其圖形、解三角函數、統計初步，供八年級上學期與九年級上學期使用。

二、　本書的習題共分三類：練習、習題、複習參考題。

(1) **練習**　　供課內練習使用。

(2) **習題**　　供課內課外作業選用。

(3) **複習參考題**　供每章複習選用，其中少量帶有「*」號的題僅供學有餘力的學生參考使用。

三、　本套書據大陸地區 1984 發佈之初級中學課本改編。

如何使用本書自學

1. 先逐字逐句閱讀各章節之解說。

2. 遇有例題在讀懂之後，再將書本合上，另自行在筆記本上模擬解法。

3. 在筆記本上寫各章節之練習、習題、複習參考題之詳解，可不抄題目，但要標明題號與頁碼，每一題都必須詳細寫出演算過程與想法。

4. 每一題做完後必須養成立即驗算的習慣，驗算無誤後在題號作「∨」之記號。

5. 遇有不會作或不明確題意的問題，請回頭重複閱讀此章節之解說，直到完全明白為止。

6. 可組織 4-6 人之讀書會，編定進度，定期聚會互相討論。

7. 本套書可在三個月內(共約費時 200 小時)完全學好初中全部數學課程，其中代數 1~4 冊與幾何 1~2 冊可併行研讀。

註：本書中所使用之度量衡單位有

長度單位： km (kilometer，公里)、m (meter，公尺)、cm (centimeter，公分)、mm (millmeter，公釐)；
1 km = 1000 m，1 m = 100 cm = 1000 mm；

重量單位： T (Tonne，公噸)、kg (kilogram，公斤)、g (gram，公克)；
1 T = 1000 kg，1 kg = 1000 g；

容量單位： kL (kiloliter，公秉)、L (liter，公升)、mL (milliliter，毫升)；
1 kL = 1000 L，1 L = 1000 mL。

第九章　數的開方

9.1　平方根

如果已經知道一個正方形的邊長，我們可以通過平方運算求出正方形的面積。反過來，如果已知正方形的面積，這個正方形的邊長應該怎樣計算？

例如，我們要做一個面積是 $9\ \text{m}^2$ 的方桌面，就要先求出這個方桌面的邊長是多少 m，也就是要求出一個平方後等於 9 的數。因為 $3^2=9$，$(-3)^2=9$，而實際上桌面的邊長不能是負數，所以，這個方桌面的邊長是 3 m。

一般地，如果一個數的平方等於 a，那這個數就叫做 a 的**平方根**(也叫做**二次方根**)。換句話說，如果 $x^2=a$，那麼，x 就叫做 a 的平方根。例如，因為 $3^2=9$，$(-3)^2=9$，所以 3 與 -3 都是 9 的平方根。又如，因為 $7^2=49$，$(-7)^2=49$，所以 7 與 -7 都是 49 的平方根。類似地，因為 $\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}$，$\left(-\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}$，所以 $\frac{2}{5}$ 與 $-\frac{2}{5}$ 都是 $\frac{4}{25}$ 的平方根。

根據平方運算可以知道，不為零的兩個數互為相反數時，它們的平方式同一個正數。一般地，**一個正數有兩個平方根，這兩個平方根互為相反數**。

因為 $0^2=0$，所以**零的平方根是零**。

任何正數、負數的平方都是正數，零的平方是零，也就是正數、負數與零的平方都不是負數，因此**負數沒有平方根**，例如，-4 沒有平方根。

求一個數 a 的平方根之運算，叫做**開平方**。

開平方與平方互為逆運算，因此，我們可以運用平方運算求一個數的平方根，也可以用平方運算檢驗一個數是不是另一個數的平方根。例如，

$\because$ $3^2=9$ ，$(-3)^2=9$

$\therefore$ 9 的兩個平方根是 3 與 -3 。

一個正數 a 的正平方根，用符號「$\sqrt[2]{a}$」表示；負的平方根，用符號「$-\sqrt[2]{a}$」表示。這兩個平方根合起來可以記做「$\pm\sqrt[2]{a}$」。這裡符號「$\sqrt[2]{\ }$」讀作「二次根號」，a 叫做**被開方數**，2 叫做**根指數**。根指數是 2 時，通常省略不寫，如 $\pm\sqrt[2]{a}$ 寫作 $\pm\sqrt{a}$，讀作「正、負根號 a」。$\pm\sqrt{0}$ 就是 0。

注意：因為負數沒有平方根，所以 $\sqrt{a}$ 中的被開方數要大於或等於零，即 $a\geq 0$ 。

【例 1】求下列各數的平方根：

(1) 36；　(2) $\frac{16}{25}$；　(3) $2\frac{1}{4}$；　(4) 0.49。

解

(1) $\because$ $(\pm 6)^2=36$

$\therefore$ 36 的平方根是 ± 6 ，即

$$\pm\sqrt{36}=\pm 6$$

(2) $\because$ $\left(\pm\frac{4}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$

$\therefore$ $\frac{16}{25}$ 的平方根是 $\pm\frac{4}{5}$ ，即

$$\pm\sqrt{\frac{16}{25}}=\pm\frac{4}{5}$$

(3) $\because$ $2\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$ ，$\left(\pm\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$

$\therefore$ $2\frac{1}{4}$ 的平方根是 $\pm\frac{3}{2}$ ，即

$$\pm\sqrt{2\frac{1}{4}}=\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=\pm\frac{3}{2}$$

(4) ∵ $(\pm 0.7)^2 = 0.49$

∴ 0.49 的平方根是 ± 0.7，即

$$\pm\sqrt{0.49} = \pm 0.7$$

【例 2】判斷下列各數有沒有平方根：

(1) 64； (2) -64； (3) 0； (4) $(-4)^2$。

解

(1) 因為 $64 > 0$，所以 64 有平方根；

(2) 因為 $-64 < 0$，所以 -64 沒有平方根；

(3) 0 有平方根；

(4) 因為 $(-4)^2 = 16 > 0$，所以 $(-4)^2$ 有平方根。

練 習

1.（口答）：

(1) 什麼數的平方等於 81？

(2) 什麼數的平方等於 $\frac{4}{9}$？

(3) 什麼數的平方等於 0.25？

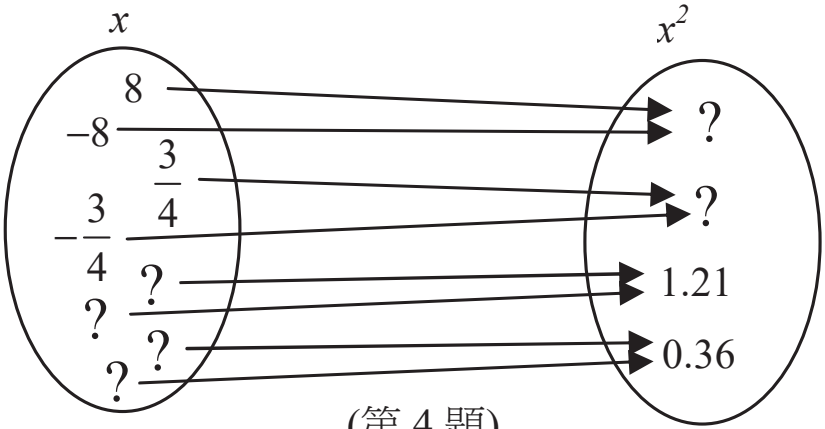
2. 求下列各數的平方根：

$$1、64、1600、0、0.0081、\frac{49}{100}、2.25、\frac{25}{144}。$$

3. 求下列各數的平方根：

$$729、324、0.81、0.0225、\frac{16}{49}、\frac{25}{64}$$

4. 如圖，求左圈與右圈中的「？」：



(第 4 題)

9.2 算術平方根

我們已經知道，一個正數有兩個平方根，其中一個是正數，一個是負數，並且這兩個平方根互為相反數。因此，求一個正數的平方根，只要求出它的正平方根，就可以知道它的負平方根。

正數 a 的正平方根，也叫做 a 的**算術平方根**，記做 $\sqrt{a}$，讀做「根號 a」。例如 9 的算術平方根是 3，可以寫成 $\sqrt{9}=3$，又如 $\sqrt{16}=4$、$\sqrt{\frac{4}{25}}=\frac{2}{5}$ 等。

零的平方根也叫做零的算術平方根，因此**零的算術平方根仍舊是零**，即 $\sqrt{0}=0$。

【例 1】求下列各數的算術平方根：

(1) 100；　(2) $\frac{49}{64}$；　(3) 0.81。

解

(1) $\because\ 10^2=100$

$\therefore$ 100 的算術平方根是 10，即

$$\sqrt{100}=10$$

(2) $\because\ \left(\frac{7}{8}\right)^2=\frac{49}{64}$

$\therefore\ \frac{49}{64}$ 的算術平方根是 $\frac{7}{8}$，即

$$\sqrt{\frac{49}{64}}=\frac{7}{8}$$

(3) $\because\ 0.9^2=0.81$

$\therefore$ 0.81 的平方根是 0.9，即

$$\sqrt{0.81}=0.9$$

【例 2】求下列各式的值：

(1) $\sqrt{10000}$ ；　(2) $-\sqrt{144}$ ；　(3) $\sqrt{\frac{25}{121}}$ ；

(4) $-\sqrt{0.0001}$ ；　(5) $\pm\sqrt{625}$ ；　(6) $\pm\sqrt{\frac{49}{81}}$ 。

解

(1) $\because \quad 100^2 = 10000$

$\therefore \quad \sqrt{10000} = 100$

(2) $\because \quad 12^2 = 144$

$\therefore \quad -\sqrt{144} = -12$

(3) $\because \quad \left(\frac{5}{11}\right)^2 = \frac{25}{121}$

$\therefore \quad \sqrt{\frac{25}{121}} = \frac{5}{11}$

(4) $\because \quad (0.01)^2 = 0.0001$

$\therefore \quad -\sqrt{0.0001} = -0.01$

(5) $\because \quad 25^2 = 625$

$\therefore \quad \pm\sqrt{625} = \pm 25$

(6) $\because \quad \left(\frac{7}{9}\right)^2 = \frac{49}{81}$

$\therefore \quad \pm\sqrt{\frac{49}{81}} = \pm\frac{7}{9}$

練　習

1. 判斷下列各語句對不對：
   (1) 5 是 25 的算術平方根；
   (2) -6 是 36 的算術平方根；
   (3) 6 是 $(-6)^2$ 的算術平方根；
   (4) 0.4 是 0.16 的算術平方根

練 習

2. 求下列各數的算術平方根：

$$121、0.25、400、0.01、\frac{1}{256}、\frac{144}{169}、0。$$

3. (1) 在公式 $c=\sqrt{a^2+b^2}$ 中，已知 $a=6$ 、$b=8$ ，求 c。

   (2) 在公式 $a=\sqrt{c^2-b^2}$ 中，已知 $c=41$ 、$b=40$ ，求 a。

4. 求下列各式的值：

$$\sqrt{1}、-\sqrt{\frac{4}{9}}、\sqrt{1.21}、-\sqrt{0.0196}、\pm\sqrt{\frac{9}{25}}、\pm\sqrt{\frac{36}{169}}。$$

9.3 用計算器開平方

前面我們根據平方運算觀察出了一些特殊的整數、小數與分數的平方根。對於一般的數，如 1840、$\frac{7}{11}$、0.529 就不容易觀察出它們的平方根。從前我們須借用平方表，但現今我們使用普通的計算器就可以求平方根。

【例 1】用計算器求 $\sqrt{1.35}$ (精確至小數後第三位)。

解　在計算器中有一按鍵 $\boxed{\sqrt{\ }}$ 的功能就是開平方。依序按鍵 $\boxed{1}$、$\boxed{\bullet}$、$\boxed{3}$、$\boxed{5}$、$\boxed{\sqrt{\ }}$，則此時計算器屏幕上顯示 1.16189500386。由於我們只要精確至小數後第三位，因此計算器要選擇 5/4、取小數後三位，此時再按 $\boxed{=}$ 鍵，即可得到答案 1.162。

【例 2】用計算器求 $\sqrt{13.5}$ (精確至小數後第三位)。

解　計算器選擇 5/4、取小數後三位，依序按鍵 $\boxed{1}$、$\boxed{3}$、$\boxed{\bullet}$、$\boxed{5}$、$\boxed{\sqrt{\ }}$、$\boxed{=}$，即可得到答案 3.674。

注意： 開平方時必須注意被開方數的小數點之位置，例如 1.35 與 13.5 兩個數的小數點之位置不同，所得$\sqrt{1.35}$與$\sqrt{13.5}$的結果截然不同，$\sqrt{13.5}$並不是$10\times\sqrt{1.35}=10\times\ 1.162=11.62$。

練 習

1. 用計算器求下列各數的算術平方根 (精確至小數後第三位)：
   (1) 9.73；　(2) 97.3；　(3) 38.5；　(4) 3.85；
   (5) 6.8；　(6) 68；　(7) 5；　(8) 4.04。
2. 用計算器求下列各式的值 (精確至小數後第三位)：
   (1) $\sqrt{2}$；　(2) $\sqrt{60}$；　(3) $\sqrt{95}$；　(4) $-\sqrt{9.5}$；
   (5) $\sqrt{1.48}$；　(6) $\sqrt{70.4}$；　(7) $-\sqrt{47.3}$；　(8) $-\sqrt{8.47}$。
3. 用計算器求下列各數的算術平方根 (精確至小數後第三位)：
   (1) 3；　(2) 7；　(3) 38.1；　(4) 1.44；
   (5) 42.5；　(6) 53.8；　(7) 6.18；　(8) 83.8。

我們先觀察下表：

n	0.04	4	400	40000
$\sqrt{n}$	0.2	2	20	200

可以看出，n 擴大到原來的 100 倍時，它的算術平方根就擴大到原來的 10 倍；反過來，n 縮小到原來的$\frac{1}{100}$，它的算術平方根就縮小到原來的$\frac{1}{10}$。也就是說，**已知正數的小數點向右或者向左移動 2 位，它的算術平方根之小數點也就相應地向右或向左移動 1 位。**

【例 3】已知 $\sqrt{0.236} \approx 0.4858$，求 $\sqrt{236000}$ 的值。

解

$\sqrt{0.236} \approx 0.4858$

小數點向右移動兩位，小數點向右移動一位

$\sqrt{23.6} \approx 4.858$

小數點向右移動兩位，小數點向右移動一位

$\sqrt{2360} \approx 48.58$

小數點向右移動兩位，小數點向右移動一位

$\sqrt{236000} \approx 485.8$

$\therefore \quad \sqrt{236000} \approx 485.8$

練 習

1. 用計算器求下列各式的值 (精確至小數後第三位)：

(1) $\sqrt{0.0415}$ ；(2) $-\sqrt{0.001289}$ ；(3) $\sqrt{0.38087}$ ；

(4) $\sqrt{64090}$ ；(5) $-\sqrt{725}$ ；(6) $\sqrt{5710052}$ ；

(7) $\sqrt{\frac{8}{25}}$ ；(8) $\sqrt{170\frac{3}{4}}$ 。

2. 求下列各式中的 x：

(1) $x^2 = 169$ ；(2) $x^2 - 2.56 = 0$ ；

(3) $9x^2 - 64 = 0$ ；(4) $3x^2 = 5$ (精確到 0.01)。

習　題　一

1. 下面的語句對不對？為什麼？

(1) -5 的平方是 25；　(2) 25 的平方根是 -5；

(3) 49 的平方根是 ± 7；　(4) -49 的平方根是 -7。

2. (1) 填表：

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19
n^2									

(2) 根據上表，寫出下列各數的平方根：

361、289、196、256。

3. 求下列各數的平方根與算術平方根；

$$3600、\frac{1}{64}、10000、7.29、0.04、\frac{121}{289}、1\frac{11}{25}。$$

4. 求下列各式的值：

$$\sqrt{0}、-\sqrt{81}、\sqrt{0.09}、\sqrt{(-25)^2}、\pm\sqrt{\frac{25}{36}}。$$

5. 求下列各式中的 x：

(1) $x^2=25$；　(2) $x^2-81=0$；

(3) $4x^2=49$；　(4) $25x^2-36=0$。

6. 用計算器求下列各數的算術平方根 (精確至小數後第二位)：

(1) 10；　(2) 13；　(3) 97.8；

(4) 1.23；　(5) 1.491；　(6) 14.91；

(7) 5.869；　(8) 58.69；　(9) 867；

(10) 7590；　(11) 0.759；　(12) 0.003094；

(13) 87420；　(14) 0.46254；　(15) 0.00035783。

7. 用計算器求下列各式的值 (精確至小數後第三位)：

(1) $\sqrt{3.63}$；　(2) $\sqrt{17.6}$；　(3) $-\sqrt{2.248}$；

(4) $\pm\sqrt{48.55}$；　(5) $\sqrt{0.2157}$；　(6) $-\sqrt{0.09286}$；

(7) $\sqrt{278\frac{3}{4}}$；　　(8) $\pm\sqrt{6665.72}$。

9.4 立方根

我們來看下面的問題：

要做一只正方體的木箱，使它的容積是 125 m^3，這個木箱的稜長應當是多少 m？

因為正方體的容積等於稜長之立方，如果設稜長為 x m，根據題意，得

$$x^3=125。$$

這就是要求出一個數，使它的立方等於 125。

因為 $5^3=125$，所以，這個正方體木箱的稜長是 5 m。

一般地，如果一個數的立方等於 a，這個數就叫做 a 的**立方根**(也叫做**三次方根**)。換句話說，如果 $x^3=a$，那麼 x 就叫做 a 的立方根。數 a 的立方根用符號「$\sqrt[3]{\ }$」表示，讀作「三次根號 a」，其中 a 是被開方數，3 是根指數。例如 $5^3=125$，5 就是 125 的立方根，用式子表式就是 $\sqrt[3]{125}=5$。

求一個數的立方根之運算，叫做**開立方**。開立方與立方互為逆運算。

【例 1】求下列各數的立方根：

(1) -8；　(2) 8；　(3) $-\frac{8}{27}$；

(4) 0.216；　(5) 0。

解　(1) ∵ $(-2)^3=-8$

∴ -8 的立方根是 -2，即

$$\sqrt[3]{-8}=-2$$

(2) ∵ $2^3=8$

∴ 8 的立方根是 2，即

$$\sqrt[3]{8}=2$$

(3) ∵ $\left(-\frac{2}{3}\right)^3=-\frac{8}{27}$

∴ $-\frac{8}{27}$ 的立方根是 $-\frac{2}{3}$，即

$$\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}=-\frac{2}{3}$$

(4) ∵ $0.6^3=0.216$

∴ 0.216 的立方根是 0.6，即

$$\sqrt[3]{0.216}=0.6$$

(5) ∵ $0^3=0$

∴ 0 的立方根是 0，即

$$\sqrt[3]{0}=0$$

從例 1 可以看出，正數 8 與 0.216 分別有一個正的立方根 2 與 0.6；負數 -8 與 $-\frac{8}{27}$ 分別有一個負的立方根 -2 與 $-\frac{2}{3}$；零有立方根零。一般地，**正數有一個正的立方根；負數有一個負的立方根；零的立方根仍舊是零**。

從例 1 還可以看出，

∵ $\sqrt[3]{-8}=-2$

$\sqrt[3]{8}=2$

∴ $\sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}$

一般地，如果 $a>0$，那麼 $\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$。所以，求負數的立方根，只要先求出這個負數的絕對值之立方根，然後再取它的相反數。

練 習

1. (1) 寫出 1、2、3、4、5、6、7、8、9 這九個數的立方；
   (2) 利用第(1)小題的結果，求下列各數的立方根：
   27、-64、343、-729。
2. 求下列各數的立方根：
   1、512、$\frac{8}{227}$、$-\frac{27}{64}$、$\frac{1}{8}$、$-\frac{1}{8}$、0.125、$-15\frac{5}{8}$。

【例 2】求下列各式的值：

(1) $\sqrt[3]{27}$；　(2) $\sqrt[3]{-27}$；

(3) $\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}}$；　(4) $-\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}$。

解

(1) $\sqrt[3]{27}=3$；

(2) $\sqrt[3]{-27}=-\sqrt[3]{27}=-3$；

(3) $\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}}=\sqrt[3]{-\frac{64}{27}}=-\frac{4}{3}=-1\frac{1}{3}$；

(4) $-\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}=\sqrt[3]{\frac{27}{64}}=\frac{3}{4}$。

練 習

1. 求下列各式的值：
   $\sqrt[3]{1000}$、$-\sqrt[3]{0.001}$、$\sqrt[3]{-\frac{64}{125}}$、$-\sqrt[3]{-216}$、$\sqrt[3]{-1}$、$\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$。
2. 填寫下表：

a	0.000001	0.001	1	1000	1000000
$\sqrt[3]{a}$					

觀察上表並說明當已知數 a 的小數點向右(或向左)每移動三位，它的立方根 $\sqrt[3]{a}$ 之小數點的移動規律是怎樣的？

練 習

3. 求下列各式的值：

$\sqrt[3]{-125}$ 、$-\sqrt[3]{0.729}$ 、$-\sqrt[3]{-\frac{125}{216}}$ 、$\sqrt[3]{4+\frac{17}{27}}$ 、$\sqrt[3]{\frac{37}{64}-1}$ 。

現在，我們把平方根與立方根的概念加以推廣，如果一個數的 n 次方(n 是大於 1 的整數)等於 a，這個數就叫做 a 的 ***n* 次方根**。換句話說，如果 $x^n = a$ ，那麼，x 就叫做 a 的 n 次方根。求 a 的 n 次方根之運算，叫做把 a **開 *n* 次方**，a 叫做**被開方數**，n 叫做**根指數**。

把一個數開奇次方時，求得的方根叫做奇次方根；把一個數開偶次方時，求得的方根叫做偶次方根。

我們知道，$2^2 = 4$、$(-2)^2 = 4$，就是說 2 與 -2 是 4 的平方根；$2^4 = 16$ 、$(-2)^4 = 16$，就是說 2 與 -2 是 16 的四次方根。一般地，正數的偶次方根有兩個，它們互為相反數。當 n 是偶數時，正數 a 的正 n 次方根用符號「$\sqrt[n]{a}$」表示，負 n 次方根用符號「$-\sqrt[n]{a}$」表示，也可以把兩個方根合起來寫作「$\pm\sqrt[n]{a}$」。例如 $\sqrt[4]{16} = 2$，$-\sqrt[4]{16} = -2$，合起來寫作 $\pm\sqrt[4]{16} = \pm 2$ 。

我們還知道，$2^3 = 8$，2 是 8 的立方根；$(-2)^3 = -8$，-2 是 -8 的立方根；$2^5 = 32$，2 是 32 的五次方根；$(-2)^5 = -32$，-2 是 -32 的五次方根。一般地，正數的奇次方根是一個正數，負數的奇次方根是一個負數。當 n 是奇數時，正數 a 的 n 次方根用符號「$\sqrt[n]{a}$」表示。例如 $\sqrt[3]{27} = 3$，$\sqrt[5]{-32} = -2$ 。

零的 n 次方根記作 $\sqrt[n]{0}$ ，$\sqrt[n]{0} = 0$

正數 a 的正 n 次方根叫做 a 的 n 次算術根。零的 n 次方根也叫做零的算術根。

求一個數的方根之運算，叫做開方。很明顯，開 n 次方與 n 次方互為逆運算。

9.5 用計算器求立方根*

一般常用的計算器大都沒有開立方的功能，在沒有其它輔助工具下，只能用嘗試法及夾擠法。例如欲求 $\sqrt[3]{13}$ ，精確至小數第二位，因 $2^3=8<13<3^3=27$ ，故知其值大於 2，小於 3；接著用計算器我們可以計算出 $2.5^3=15.625>13$ 、 $2.4^3=13.824>13$ 、 $2.3^3=12.167<13$ ，故知其值介於 2.3 與 2.4 之間；接著利用計算器再嘗試 $2.35^3=12.977875<13$ 、 $2.36^3=13.144256>13$ ，故知其值介於 2.35 與 2.36 之間。因我們還要判斷到底是那個值，故需再計算 $2.355^3=13.06088875>13$ ，此時便可判斷出 $\sqrt[3]{13}=2.35$ 。

如果您有一台工程用計算器，就可以輕易求出一個數 a 的立方根，其操作方法是依序按鍵

2ndF、$\sqrt{\ }$、a、=。

註： 2ndF 鍵是第二功能鍵，相繼按 2ndF、$\sqrt{\ }$ 鍵，意思是執行 $\sqrt{\ }$ 鍵上方所指 $\sqrt[3]{\ }$ 的功能按鍵。

【例 1】用工程計算器求下列各數的立方根：

(1) 343； (2) −1.331。

解 (1) 依序按鍵：2ndF、$\sqrt{\ }$、3、4、3、=，即可得到答案 7；

(2) 依序按鍵：2ndF、$\sqrt{\ }$、−、1、•、3、3、1、=，即可得到答案 −1.1 (亦可按鍵 2ndF、$\sqrt{\ }$、1、•、3、3、1、=，最後再於答案前加負號)。

---

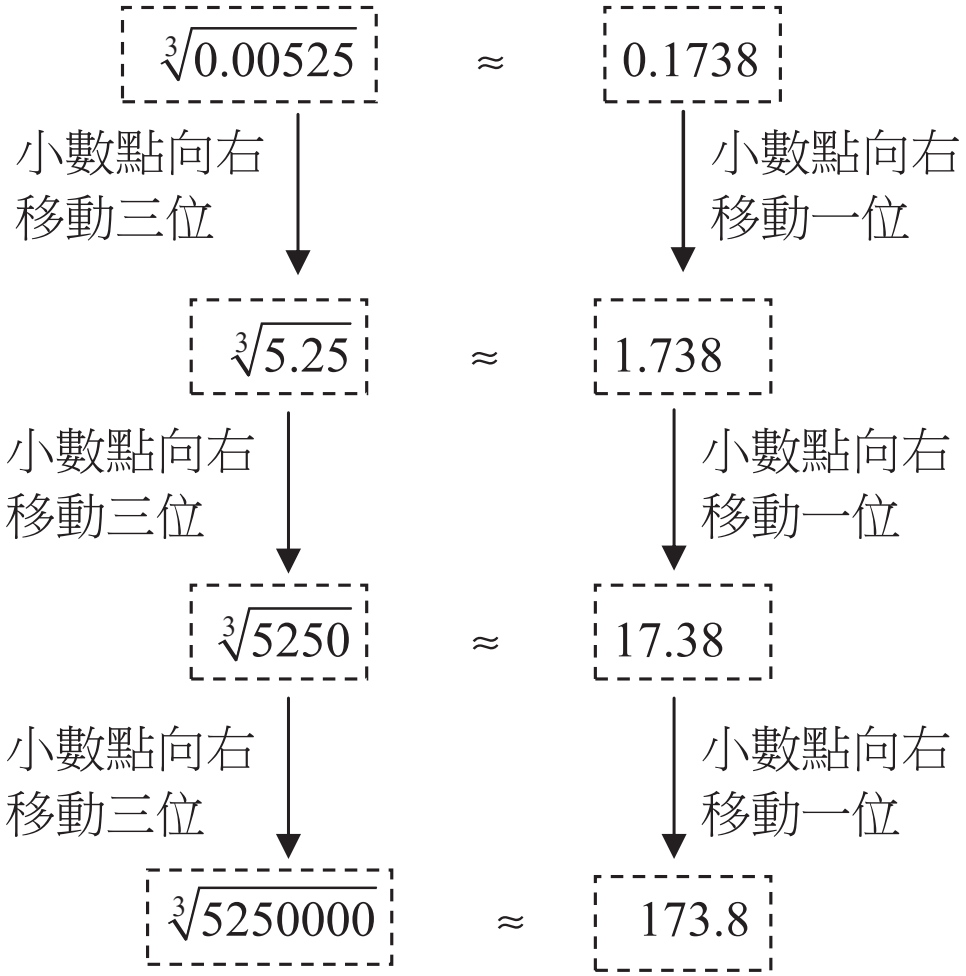
* 若無工程用計算器，本節可略過

【例 2】用工程計算器求 $\sqrt[3]{2}$ (精確至小數後第三位)。

解　依序按鍵：[2ndF]、[$\sqrt{}$]、[2]、[=]，屏幕顯示 1.25992105，即得解 $\sqrt[3]{2}=1.260$。

【例 3】已知 $\sqrt[3]{0.00525}\approx 0.1738$，求 $\sqrt[3]{5250000}$ 的值。

解



$\therefore\quad \sqrt[3]{5250000}\approx 173.8$

練　習

1. 用計算器求下列各數的立方根 (精確至小數後第二位)：

(1) 3；　(2) 8.8；　(3) 98.7；　(4) 0.35；

(5) $65\frac{4}{5}$；　(6) 1.847；　(7) 25.738；　(8) $8\frac{1}{8}$；

(9) -80；　(10) -16.5。

練 習

2. 用計算器求下列各式的值 (精確至小數後第二位)：

(1) $\sqrt[3]{5}$ ；　(2) $\sqrt[3]{68.8}$ ；　(3) $\sqrt[3]{0.8725}$ ；

(4) $\sqrt[3]{-43.6}$ ；　(5) $-\sqrt[3]{0.459}$ ；　(6) $\sqrt[3]{0.00094}$ ；

(7) $\sqrt[3]{0.037}$ ；　(8) $\sqrt[3]{6570}$ ；　(9) $\sqrt[3]{420000}$ ；

(10) $\sqrt[3]{0.00005087}$ ；　(11) $\sqrt[3]{-258}$ ；　(12) $-\sqrt[3]{0.0062548}$

3. 求下列各式中的 x：

(1) $x^3=27$ ；　(2) $x^3=\frac{1}{8}$ ；

(3) $27x^3+64=0$ ；　(4) $4x^3-5=0$ (精確到 0.01)。

9.6 實數

我們已經學過，任何一個有理數都可以寫成有限小數(整數可以看做小數點後面是 0 的小數)或者循環小數的形式。例如：

$$3=3.0$$

$$-\frac{3}{5}=-0.6$$

$$\frac{9}{11}=0.\overline{81}$$

$$\vdots$$

反過來也對，即任何有限小數與循環小數都是有理數。

在實際中，我們還會遇到一種小數，它們不能寫成有限小數的形式，也不能寫成循環小數的形式。例如，$\sqrt{2}=1.41421356\cdots$、$0.101001000100001\cdots$(兩個 1 之間依次多一個 0)、圓周率 $\pi=3.14159265\cdots$，它們的小數位數是無限的，而且是不循環的。這樣的小數叫做無限不循環小數。

無限不循環小數就叫做**無理數**。如上面例子中的 $\sqrt{2}$ 、$0.101001000100001\cdots$、π 都是無理數。無理數是很多的，例如，

$$\sqrt{3}=1.732050\cdots$$

$$-\sqrt{5}=-2.236067\cdots$$

$$\sqrt[3]{2}=1.259921\cdots$$

$$\frac{\pi}{2}=1.57079632\cdots$$

0.232332333233332…(兩個2之間依次多一個3)

⋮

也都是無理數。但是像 $\sqrt{4}$、$-\sqrt[3]{27}$ 等就不是無理數，而是有理數。

無理數可分為正無理數與負無理數。例如 $\sqrt{2}$、$\sqrt[5]{3}$、π、…是正無理數；$-\sqrt{2}$、$-\sqrt[5]{3}$、$-\pi$、…是負無理數。

有理數與無理數統稱**實數**。這樣，我們學過的數就有：

實數
- 有理數
  - 正有理數
  - 零
  - 負有理數

  → 有限小數或循環小數
- 無理數
  - 正無理數
  - 負無理數

  → 無限不循環小數

有理數與無理數都有正負之分，所以實數也有正負之分。如果 a 表示一個正實數，$-a$ 就表示一個負實數。a 與 $-a$ 互為相反數。我們規定：0 的相反數仍舊是 0。

實數的絕對值意義也與有理數一樣：**一個正實數的絕對值是它本身；一個負實數的絕對值是它的相反數；零的絕對值是零。**例如，$|\sqrt{2}|=\sqrt{2}$、$|-\sqrt{2}|=\sqrt{2}$、$|\pi|=\pi$、$|-\pi|=\pi$、$|0|=0$ 等。

我們已經知道，每一個有理數都可以用數軸上的點來表示。但是，數軸上所有的點並不都是表示有理數。因為數軸上的點可以表示任何整數或小數，其中的無限不循環小數就是無理數。

把數從有理數擴充到實數以後，實數與數軸上的點就是一一對應的，即每一個實數都可以用數軸上的一個點來表示，反過來，數軸上的每一個點都表示一個實數。

在進行實數運算時，有理數的運算律與運算性質同樣適用。在實數範圍內，正數與零總可以進行開方運算，須要注意，負數只能開奇次方，不能開偶次方。

在實數運算中，如果遇到無理數，並且需要求出結果的近似值，可以按照所要求的精確度用近似的有限小數去代替無理數，再進行計算。

【例】 計算： (1) $\sqrt{5}+\pi$ (精確到 0.01)；

(2) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}$ (結果保留三個有效數字)。

解 (1) $\sqrt{5}+\pi \approx 2.236+3.142 \approx 5.38$；

(2) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} \approx 1.732\times 1.414 \approx 2.45$。

練 習

1. （口答）什麼叫做無理數？舉出兩個無理數的例子。

2. （口答）下面的語句對不對？如果不對，怎樣說才對？
   (1) 無限小數都是無理數；
   (2) 無理數都是無限小數；
   (3) 帶根號的數都是無理數。

3. 下列各數，哪些是有理數，哪些是無理數？

$$-\pi、-3.14、-\sqrt{3}、1.732、0、0.3、$$

$$18、\sqrt{\frac{25}{36}}、\frac{21}{31}、\sqrt{7}、-\sqrt{16}。$$

4. (1) 有理數都是實數嗎？實數都是有理數嗎？舉例說明；
   (2) 無理數都是實數嗎？實數都是無理數嗎？舉例說明。

5. 求下列各式中的實數 x：
   (1) $|x|=\frac{2}{3}$；　　(2) $|x|=0$；
   (3) $|x|=\sqrt{10}$；　　(4) $|x|=\pi$。

練 習

6. 計算：

(1) $\sqrt{10}+\frac{6}{7}-\pi$ (精確到 0.01)；

(2) $(-4)\times\sqrt{7}+\frac{1}{2}\times\sqrt{6}$ (結果保留三個有效數字)。

習 題 二

1. 下列各語句對不對？為什麼？

(1) -0.064 的立方根是 -0.4 ；

(2) 8 的立方根是 ± 2 ；

(3) $\frac{1}{27}$ 的立方根是 $\frac{1}{3}$ 。

2. 求下列各式的值：

(1) $-\sqrt[3]{0.027}$ ；　(2) $\sqrt[3]{-343}$ ；　(3) $\sqrt[3]{\frac{125}{27}}$ ；

(4) $\sqrt[3]{1+\frac{61}{64}}$ ；　(5) $\sqrt[3]{1-\frac{19}{27}}$ ；　(6) $-\sqrt[3]{\frac{7}{8}-1}$ 。

3. 求下列各式中的 x：

(1) $x^3=0.729$ ；　(2) $64x^3+125=0$ ；

(3) $x^3-3=\frac{3}{8}$ ；　(4) $(x-1)^3=8$ 。

4. 用計算器求下列各數的立方根 (精確至小數後第二位)：

(1) 0.39；　(2) 48.3；　(3) -2.36 ；

(4) -34.26 ；　(5) 434.5；　(6) 4936；

(7) -0.0532 ；　(8) 0.007283。

5. 用計算器求下列各式的值 (精確至小數後第二位)：

(1) $\sqrt[3]{0.432}$ ；　(2) $\sqrt[3]{-1.948}$ ；　(3) $-\sqrt[3]{7456.3}$ ；

(4) $\sqrt[3]{67.5}$ ；　(5) $\sqrt[3]{400000}$ ；　(6) $\sqrt[3]{-8\frac{5}{9}}$ ；

(7) $\sqrt[3]{0.0000518}$ ；　(8) $-\sqrt[3]{-350\frac{4}{25}}$ 。

6. (1) 正方體的表面積是 11 m^2，求它的稜長 (精確到 0.01 m)；
(2) 正方體的體積是 11 m^2，求它的表面積 (精確到 0.01 m)。

7. 已知 $a=0.5$ 、 $b=7.5$ 、 $c=-0.36$ ，計算下列各式的值(精確到 0.01)：

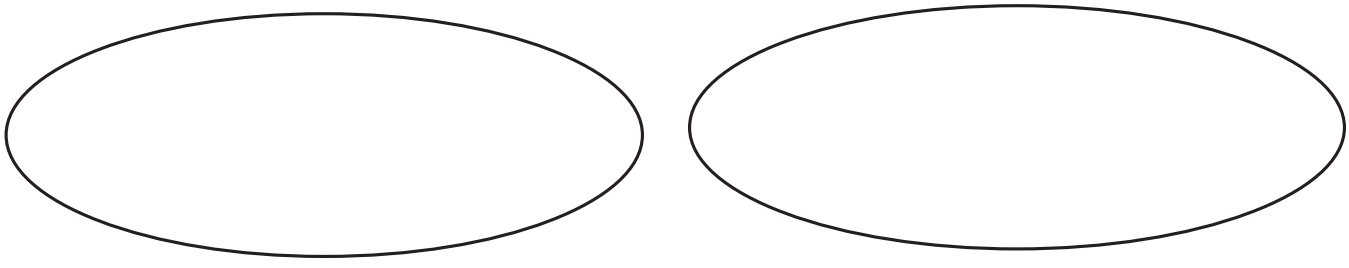
(1) $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ；

(2) $(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a})c$ 。

8. 把下列各數分別填在有理數集合與無理數集合的圈裡：

$\frac{22}{7}$ 、3.14159265、$\sqrt{8}$ 、-8 、$\sqrt[3]{9}$ 、

0.6、$3\frac{1}{4}$ 、$\sqrt{36}$ 、1.732、$\frac{\pi}{3}$ 。



(第 8 題)

9. 下列各語句對不對？為什麼？
(1) 所有的有理數都可以用數軸上的點表示出來；反過來，數軸上的點都表示有理數；
(2) 所有的實數都可以用數軸上的點表示出來；反過來，數軸上的點都表示實數。

10. 求下列各數的絕對值：

$$-\sqrt{3}\ 、\sqrt[3]{-8}\ 、\sqrt{7}\ 、\frac{\sqrt{2}}{-3}\ 、\sqrt{3}-1.7\ 、1.4-\sqrt{2}\ 。$$

11. 比較下列各組裡兩個數的大小：：

(1) 15、0；　　(2) $-\frac{3}{4}$、0；

(3) -7、-9；　　(4) $\sqrt{2}$、$-\sqrt{3}$；

(5) $-\sqrt{3}$、-1.731；　　(6) π、3.1416

12. 計算 (精確到 0.01)：

(1) $\sqrt{5}-\sqrt{3}+0.415$；　　(2) $\sqrt[3]{6}-\pi-\sqrt{2}$。

小　結

一、本章主要內容是數的開方之概念以及實數的初步概念。

二、數的概念是在實踐中不斷發展的。在小學裡我們先學習了自然數與零；又學習了分數與小數(有限小數與循環小數)，就是說，學習了正有理數與零；到了七年級又學習了負有理數。這樣，數的概念就擴充到了有理數。現在我們又把數的概念擴充到實數。這樣，我們學過的數可以列成下表：

實數
- 有理數
  - 正有理數
  - 零
  - 負有理數
- 無理數
  - 正無理數
  - 負無理數

三、在進行實數運算時，有理數的運算律與性質同樣適用。

開方與乘方互為逆運算。用乘方可檢驗開方的結果正確否。

在實數範圍內，正數有 n 次方根；負數有奇次方根，但沒有偶數方根；零的 n 次方根是零。

正數之正的方根叫做算術根，零的算術根是零。

複習參考題九

1. 計算：

   (1) $-8-\left[-\frac{1}{7}+\left(-\frac{1}{6}-0.25\times\frac{2}{3}\right)\div 2\frac{1}{3}\right]\times 6$ ；

   (2) $\left[-\frac{2}{3}-\left(-\frac{4}{5}\right)\right]\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\times\left(-\frac{4}{5}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)^2\right]$ ；

   (3) $\frac{7}{9}\times(-3)^3-\frac{1}{6}\times(-3)^2+\frac{1}{12}\times(-3)-\frac{1}{4}$ ；

   (4) $8.954^3-7.308^3-26.54^2+37.69^2$ (用計算器計算，精確到 0.1)。

2. 各舉一例說明加法交換律、加法結合律、乘法交換律、乘法結合律與分配律。

3. 如果 $a\neq 0$，那麼 a 的相反數是什麼？a 的倒數是什麼？a 的絕對值是什麼？

4. 舉例說明：

   (1) a 是不是一定大於 $-a$ ；

   (2) $\frac{a}{2}$ 是不是一定小於 a ；

   (3) 已知 $a^2=b^2$ ，能不能斷定 $a=b$ ；

   (4) 已知 $|a|>|b|$ ，能不能斷定 $a>b$ 。

5. 如果 n 是正整數，那麼

   (1) $2n$ 是奇數還是偶數？$2n-1$ 呢？

   (2) $(-1)^{2n}=?$ $(-1)^{2n-1}=?$ $(-a)^{2n}=?$ $(-a)^{2n-1}=?$

6. 已知 $A=x^3-x+6$ 、 $B=x^3-x^2+x+3$ ，計算：

(1) $(A-x^3)(B-x^3)$ ；　(2) $(A+B)\div(A-B)$ ；

(3) $(A-B)^2$ 。

7. 把下列各式分解因式：

(1) $m^3+12m^2n+36mn^2$ ；　(2) $12xy-9x^2-4y^2$ ；

(3) x^4-13x^2+36 ；　(4) a^6-7a^3-8 ；

(5) $a^3-b^3-3ab(a-b)$ ；　(6) $a^3+b^3+3a^2b+3ab^3$ ；

(7) $a^3-b^3-a^2+b^2$ ；　(8) $a(a+1)-b(b+1)$ ；

(9) $a^2-4ab+4b^2-4c^2$ ；

(10) $(x+z)(x-z)+y(y-2x)$ ；

(11) $(5x^2+x-20)^2-(4x^2-x+4)^2$ ；

(12) $(a+b)^2+(a+c)^2-(c+d)^2-(b+d)^2$ 。

8. 化簡：

(1) $(x-1)(x+4)-\{(x+2)(x-5)-[(x+3)(x-4)-(x-1)(x+6)]\}$

(2) $(2x^2-6x+5)^2-(2x^2-6x+4)^2-(2x+3)^2$ ；

(3) $\dfrac{a^3-b^3}{a-b}-\dfrac{a^3+b^3}{a+b}-2ab$ ；

(4) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-9}\bullet\dfrac{x^2-x-12}{x^2-4x+4}\div\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-5x+6}$ ；

(5) $\dfrac{2}{x^2-3x+2}-\dfrac{2}{x^2-4x+3}+\dfrac{2}{x^2-5x+6}-\dfrac{1}{x^2-1}$ ；

(6) $\left(\dfrac{a^2}{a+b}-\dfrac{a^3}{a^2+2ab+b^2}\right)\div\left(\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{a^2}{a^2-b^2}\right)$ ；

(7) $\dfrac{1+\dfrac{x}{y}}{1-\dfrac{x}{y}}\div\dfrac{1+\dfrac{y}{x}}{1-\dfrac{y}{x}}$ ；　(8) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}$ 。

9. (1) 已知 $A=2x^4-3x^2+6x-7$ 、 $B=x^2-x+1$ ，求 $A\div B$ 的商式 Q 及餘式 R ；

(2) 根據 $A=BQ+R$ 來檢驗第(1)小題中所得的結果。

10. (1) 方程有哪幾條同解原理？

(2) 不等式有哪幾條基本性質？

11. 解下列方程：

(1) $3\left\{x-\dfrac{3x-1}{4}-\left[1-2\left(x-\dfrac{3+x}{5}\right)\right]\right\}=5x-2$ ；

(2) $\dfrac{1}{2}(x-1)^2-\dfrac{5}{6}(x+2)^2+\dfrac{1}{3}(x-3)^2=0$ ；

(3) $\dfrac{3x-38}{4x^2-4}-\dfrac{4}{x+1}=\dfrac{4}{1-x}$ ；

(4) $\dfrac{x+5}{5-x}+\dfrac{x-5}{5+x}=\dfrac{100}{25-x^2}$ 。

12. 解下列方程組：

(1) $\begin{cases}\dfrac{7x-3y}{5}=\dfrac{5x-y}{3}-\dfrac{x+y}{2}\\ 3(x-1)=5(y+1)\end{cases}$ ；

(2) $\begin{cases}\dfrac{3x-2y}{6}+\dfrac{2x+3y}{7}=1\\ \dfrac{3x-2y}{6}-\dfrac{2x+3y}{7}=5\end{cases}$ ；

(3) $\begin{cases}\dfrac{11}{2x-3y}+\dfrac{18}{3x-2y}=13\\ \dfrac{27}{3x-2y}-\dfrac{2}{2x-3y}=1\end{cases}$ ；

(4) $\begin{cases}3x+14=4y+6z\\ 7y-1=2z+8x\\ 5z+18=2x+3y\end{cases}$ 。

13. 解下列方程組：

(1) $\begin{cases} ax-by=a^2+b^2 \\ bx+ay=a^2+b^2 \end{cases}$；　(2) $\begin{cases} \dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{a-b}=2a \\ x-y=4ab \end{cases}$；

(3) $\begin{cases} \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=a-b \\ \dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{y}=a+b \end{cases}$；　(4) $\begin{cases} y+z=2a \\ z+x=2b \\ x+y=2c \end{cases}$。

14. 已知方程 $x^3+px^2+qx+r=0$ 有一個根是 1，一個根是 2，一個根是 3，求 p、q、r 的值。

15. (1) x 取什麼值時，不等式 $16-3(2x-5)<25-4x$ 成立？

(2) x 取什麼值時，代數式 $5(x-1)-6(x-2)$ 為正數？

(3) x 取什麼值時，代數式 $\dfrac{1}{5}(x+2)-\dfrac{1}{3}(x-1)$ 為負數？

(4) 求不等式 $-4<x\le -1$ 的整數解，並在數軸上表示出來；

(5) 求不等式 $|x|<3$ 的整數解，並在數軸上表示出來。

16. (1) 如果 $a\ne b$，那麼 $(a-b)^2>0$，為什麼？

(2) 如果 $a\ne b$，那麼 $a^2+b^2>2ab$，為什麼？

17. 把一個長方形的長增加 4 cm，寬減少 1 cm，它的面積不變；把它的長減少 2 cm，寬增加 1 cm，它的面積也不變。求這個長方形的面積。

18. 甲、乙兩隊修一條路，如果兩隊合修 4 天後，剩餘部分由甲隊單獨修，先後共要 6 天；如果兩隊合修 3 天後，剩餘部分由乙隊單獨修，先後也共要 6 天。求兩隊單獨修這條路，各需要幾天。

19. (1) 設 $x^2=a$，a 是 x 的什麼數？x 是 a 的什麼數？

(2) 設 $y^3=b$，b 是 y 的什麼數？y 是 b 的什麼數？

20. 下列語句對不對？為什麼？

(1) -4的平方是 16；　(2) 16 的平方根是-4；

(3) -1的立方是-1；　(4) -1的立方根是-1；

(5) -1的平方根是-1；　(6) 0 的平方根是 0。

21. 什麼叫算術平方根？求出下列各數的平方根：

$$64、36、0.25、5、(-3)^2、\left(\frac{2}{5}\right)^2、\left(-\frac{4}{13}\right)^2。$$

22. 用計算器求下列各式的值：

(1) $\sqrt{94.3}$；　(2) $\sqrt{0.5374}$；　(3) $\sqrt{0.07321}$；

(4) $\sqrt{8200}$；　(5) $\sqrt{527.48}$；　(6) $\sqrt{4\frac{1}{4}}$；

(7) $\sqrt[3]{35.8}$；　(8) $\sqrt[3]{0.43}$；　(9) $\sqrt[3]{278.4}$；

(10) $\sqrt[3]{1.47}$；　(11) $\sqrt[3]{0.002008}$；　(12) $\sqrt[3]{4107\frac{1}{2}}$；

(13) $\sqrt{0.00895}-\sqrt{0.0234}$；　(14) $\sqrt[3]{0.0695}+\sqrt[3]{0.1783}$；

(15) $3.472^2+5.089^2$；　(16) $\sqrt{3.472^2+5.089^2}$。

23. 求下列各式中的 x：

(1) $x^2=169$；　(2) $121x^2-25=0$　(3) $9x^2=64$；

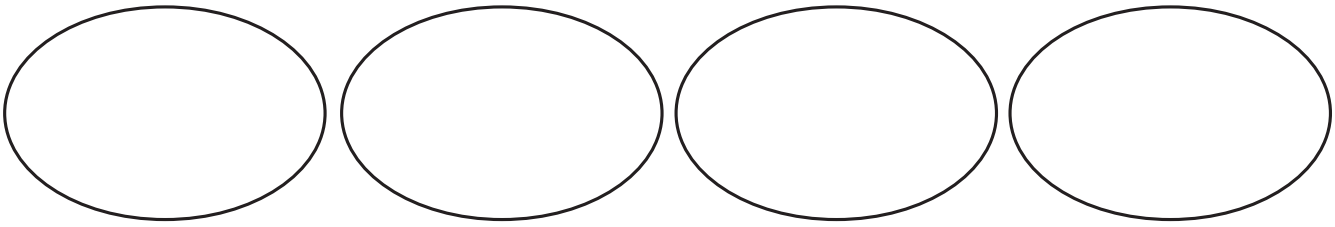
(4) $x^2-1.69=0$；　(5) $x^3=64000$；　(6) $x^3=-0.125$；

24. 已知正方形的面積是 360 cm^2，求正方形邊長(精確到 0.1 cm)。

25. 已知正方體的稜長是 5 cm，再作一個正方體，使它的體積是原正方體的體積之 2 倍，求所做的正方體之稜長 (精確到 0.1 cm)。

26. 要使人造地球衛星能夠繞地球運轉，必須使它的速度大於第一宇宙速度而小於第二宇宙速度。第一宇宙速度的計算公式是$V_1=\sqrt{qR}$ (m/秒)，第二宇宙速度的計算公式是$V_2=\sqrt{2qR}$ (m/秒)，$R=6.4\times10^6$ (m)。求第一、第二宇宙速度(精確到 100 m/秒)。

27. 什麼叫做無理數？在下面每一個圈裡，至少填入三個數：



正有理數集合　　負有理數集合　　正無理數集合　　負無理數集合

(第 27 題)

28. 有沒有最小的自然數？有沒有最小的整數？有沒有最小的有理數？有沒有最小的無理數？有沒有最小的實數？有沒有絕對值最小的實數？

29. 求下列各數的絕對值：

$$-2\sqrt{5}\ 、\ \sqrt[3]{-7}\ 、\ \sqrt{5}-\sqrt{7}\ 、\ 3.1416-\pi\ 。$$

30. 比較下列各組裡兩個實數的大小：：

(1) 1.574、1.5；　　(2) $-\sqrt{5}$ 、-2.24 ；

(3) $-\pi$ 、-3.1415926 ；　　(4) $\sqrt{29}$ 、$5\frac{4}{13}$ 。

31. 計算(精確到 0.01)：

(1) $\pi+\sqrt{10}-\frac{1}{3}+0.145$ ；　　(2) $\sqrt{5}+\frac{1}{7}-\left(4.375-\frac{4}{3}\right)$ 。

32. 觀察平方根表，回答下列問題：

(1) 被開方數由 1.0 增加到 1.1 時，平方根的值是增大還是減小？

(2) 被開方數的值逐漸增大時，平方根的值是增大還是減小？

附錄　平方根的筆算求法

求一個正數的平方根，除查平方根表外，還可以用筆算來求。

把一個正整數開平方，首先要確定平方根有幾位整數。

我們知道，兩個正數裡，較大的一個正數之平方也較大。由平方運算得到，

$$1^2=1 \qquad 9^2=81$$
$$10^2=100 \qquad 99^2=9801$$
$$100^2=10000 \qquad 999^2=998001$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

可以看出，一位數的平方是一位數或者二位數，二位數的平方是三位數或者四位數；三位數的平方是五位數或者六位數，…；反過來，

一位數或者二位數的平方根有一位整數，

三位數或者四位數的平方根有兩位整數，

五位數或者六位數的平方根有三位整數，

$$\vdots$$

因此，把被開平方數從右到左每兩位為一段用一個撇號「’」分開(最左邊的一段可以只有一位)，所分得的段數，就是這個數的平方根之整數的位數。例如，1156 可以分成 11’56 兩段，它的平方根有兩位整數；85264 可以分成 8’52’64 三段，它的平方根有三位整數。

其次，要確定這個正整數的算術平方根之最高位上的數。

在兩個正數中，較大的數平方也較大，反過來，較大的數之算術平方根也較大。根據這個性質，可以確定一個數的算術平方根之最高位上的數。例如 11’56 的左邊第一段是 11，11 在 3^2 與 4^2 之間，由此可知，1156 在 30^2 與 40^2 之間，所以 1156 的算術平方根之最高位上的數是 3；8’52’64 的左邊第一段是 8，8 在 2^2 與 3^2 之間，由此可知，85264 在 200^2 與 300^2 之間，所以 85264 的算術平方根之最高位上的數是 2。

第三，確定正整數的平方根之其它位上的數，下面我們通過例題來研究確定的方法。

例如，求$\sqrt{1156}$。

我們已經知道$\sqrt{1156}$有兩位整數，最高位上的數是 3，即平方根的十位數是 3。如果用 a 代表這個平方根的個位上的數，那麼平方根就可以寫成$30+a$的形式。於是

$$\begin{aligned}1156&=(30+a)^2\\&=30^2+2\times30a+a^2\end{aligned}$$

從 1156 減去$30^2=900$，得

$$\begin{array}{rcccll}&1&1&5&6&\cdots\cdots\ (30+a)^2\\-&&9&0&0&\cdots\cdots\ 30^2\\\hline&&2&5&6&\cdots\cdots\ 2\times30a+a^2\end{array}$$

就是說，$256=2\times30a+a^2=(2\times30+a)a$。根據這個關係，我們可以求出個位數 a。

由於 a 是個位數，2×30比 a 大得多，所以把$2\times30+a$看做近似於2×30，用2×30去試除 256，得到試商 4。

要確定 a 的值是否等於 4，只要計算當$a=4$時，$(2\times30+a)a$的值是不是 256。由$(60+4)\bullet4=256$，所以 a 的值恰是 4，因此$\sqrt{1156}=34$。

上面所說的計算過程，可以寫成下面的豎式：

$$\begin{array}{rr|l}&&\ \ 3\ \ 4\\&&\sqrt{\ 11'56}\\&&\ \ 9\\\hline&2\times30=60&2\ 56\\+&4&\\\hline&64&2\ 56\\\hline&&\ \ 0\end{array}$$

這裡餘數是零，表示開的盡，也就是$34^2=1156$，1156 是一個完全平方數。一般地，如果一個正數恰好是另一個有理數的平方，這個正數叫做**完全平方數**。

筆算開平方演算的主要步驟是：

1. 把被開方的整數，從個位起向左每隔兩位為一段，用撇號分開；
2. 根據左邊第一段裡的數，求得算術平方根的最高位上之數；
3. 從第一段裡的數減去求得之最高位上數的平方，在它們的差之右邊寫上第二段數作為第一個餘數；
4. 把求得的初商乘以 20 去試除第一個餘數，所得的最大整數作為試商(如果這個最大整數大於或等於 10，就用 9 做試商)；
5. 用初商的 20 倍加上這個試商再乘以試商，如果所得的積小於或等於餘數，這個試商就是算術平方根的第二位數；如果所得的積大於餘數，就把試商逐次縮小再試，直到積小於或等於餘數為止；
6. 用同樣的方法，繼續求算術平方根的其它各位上之數。

【例 1】求 (1) $\sqrt{1444}$；(2) $\sqrt{85264}$。

解 (1)

$$\begin{array}{r|l} & 3\ \ 8 \\ \hline \sqrt{\ } & 14'44 \\ & 9 \\ \hline 2\times 30=60 & 5\ 44 \\ + \quad 8 & \\ \hline 68 & 5\ 44 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\therefore\quad \sqrt{1444}=38$

(2)

$$\begin{array}{r|l} & 2\ \ 9\ \ 2 \\ \hline \sqrt{\ } & 8'52'64 \\ & 4 \\ \hline 49 & 4\ 52 \\ & 4\ 41 \\ \hline 582 & 11\ 64 \\ & 11\ 64 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\therefore\quad \sqrt{85264}=292$

注意：例 1 第(1)小題中 544 除 60 得試商 9，但是 69×9 的積大於 544，所以試商改用 8；例 1 第(2)小題中 452 除 40 得試商 11，但是試商只能是一位數，所以改用 9。

【例 2】求 $\sqrt{10404}$ 。

解

$$\begin{array}{r|l} & 1\ \ 0\ \ 2 \\ \hline \sqrt{\ } & 1'04'04 \\ & 1 \\ \hline 202 & 4\ 04 \\ & 4\ 04 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\therefore\quad \sqrt{10404}=102$

注意：在第一步計算中，1 減 1，餘 0。寫下被開方數的下一段得 4，用 20 除 4 不夠商 1，在算術平方根的第二位寫 0，再把被開方數的第三段寫下來，得 404。用 200 去除 404 得試商 2。

正小數的開平方，可以仿照上面的方法來演算，不同的是分段之時候，要從小數點向左、向右每隔兩位用撇號分開，最後一段如果只有一位，必須添零補成兩位。例如 0.3249 分段後應該是 0.32’49，232.5625 分段後應該是 2’32.56’25，321.512 分段後應該是 3’21.51’20。還要注意所得結果的小數點必須與被開方數的點對齊。

【例 3】求 (1) $\sqrt{0.3249}$ ； (2) $\sqrt{232.5625}$ 。

解 (1)

$$\begin{array}{r|l} & 0.\ 5\ \ 7 \\ \hline \sqrt{\ } & 0.32'49 \\ & 25 \\ \hline 107 & 7\ 49 \\ & 7\ 49 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\therefore\quad \sqrt{0.3249}=0.57$

(2)

$$\begin{array}{r|l} & 1\ \ 5.\ \ 2\ \ 5 \\ \hline \sqrt{\ } & 2'32.56'25 \\ & 1 \\ \hline 25 & 1\ 32 \\ & 1\ 25 \\ \hline 302 & 7\ 56 \\ & 6\ 04 \\ \hline 3045 & 1\ 52\ 25 \\ & 1\ 52\ 25 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\therefore\quad \sqrt{232.5625}=15.25$

前面三個例子中所給出的被開方數都是完全平方數。類似地也可以求出非完全平方數的近似平方根。

【例 4】求 (1) $\sqrt{12.5}$ 的近似值(精確到 0.01)；

(2) $\sqrt{2}$ 的近似值(精確到 0.0001)。

解 (1)

```
        3.  5   3   5
   ┌──────────────────
√  │ 12.50’00’00
     9
   ──────────────────
65 │ 3 50
     3 25
   ──────────────────
703 │  25 00
       21 09
   ──────────────────
7065 │   3 91 00
        3 53 25
   ──────────────────
           37 75
```

$\therefore \quad \sqrt{12.5} \approx 3.54$

(2)

```
        1.  4   1   4   2   1
   ┌──────────────────────────
√  │ 2.00’00’00’00’00’00
     1
   ──────────────────────────
24 │ 1 00
       96
   ──────────────────────────
281 │  4 00
        2 81
   ──────────────────────────
2824 │ 1 19 00
        1 12 96
   ──────────────────────────
28282 │  6 04 00
         5 65 64
   ──────────────────────────
282841 │ 38 36 00
          28 28 41
   ──────────────────────────
             10 07 59
```

$\therefore \quad \sqrt{2} \approx 1.4142$

例 4 中的 12.5 與 2 都是非完全平方數，筆算開方時可以依照要求的精確度適當補零，再進行開方運算。必須注意補零時應該使小數部分能夠分成每兩位一段。